KULTUSMINISTERIUM DES LANDES SACHSEN-ANHALT

Abitur
April/Mai 2004

Mathematik
(Leistungskurs)

Arbeitszeit: 300 Minuten

Der Prüfling wählt je eine Aufgabe aus den Gebieten L 1, L 2 und L 3 zur Bearbeitung aus.

Gewählte Aufgaben (Die drei zur Bewertung vorgesehenen Aufgaben sind vom Prüfling anzukreuzen.):

Gebiet L 1		Gebiet L 2		Gebiet L 3	
Aufgabe 1.1	☐	Aufgabe 2.1	☐	Aufgabe 3.1	☐
Aufgabe 1.2	☐	Aufgabe 2.2	☐	Aufgabe 3.2	☐

Unterschrift Prüfling:

Gebiet L 1

Aufgabe 1.1
Analysis

Gegeben sind Funktionen f_a durch

$$y = f_a(t) = \frac{2 \cdot e^{a \cdot t}}{e^{a \cdot t} + 29}, \qquad t \in R, a \in R, a > 0 .$$

Ihre Graphen werden mit G_a bezeichnet.

a) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionen f_a für $t \to \pm\infty$ und geben Sie für die Asymptoten Gleichungen an.

Zeigen Sie, dass alle Funktionen f_a monoton steigend sind.

b) Untersuchen Sie die Funktionen f_a auf Nullstellen und lokale Extremstellen.

Jeder Graph G_a besitzt genau einen Wendepunkt W_a.
Zeigen Sie, dass die Wendepunkte W_a auf einer Parallelen zur t-Achse liegen.

Zeichnen Sie die Graphen $G_{0,75}$ und G_1 in ein und dasselbe Koordinatensystem und schlussfolgern Sie, welchen Einfluss der Parameter a auf den Verlauf der Graphen G_a hat.

c) Der Graph G_1, die t-Achse und die Gerade mit der Gleichung t = ln 29 begrenzen eine Fläche.
Berechnen Sie die Maßzahl des Inhalts dieser Fläche.

Durch die Funktion $f_{0,04}$ für $0 \le t \le 200$ (t in Tagen) kann das Wachstum von Sonnenblumen beschrieben werden, wobei $f_{0,04}(t)$ die Höhe (in m) der Pflanzen zur Zeit t bedeutet.

d) Berechnen Sie die Höhe einer Sonnenblumenpflanze nach 10, 50 und 150 Tagen.

Berechnen Sie, wann die Wachstumsgeschwindigkeit einer Sonnenblumenpflanze am größten ist.

Erläutern Sie Grenzen dieser mathematischen Modellbildung.

Gebiet L 1

Aufgabe 1.2
Analysis

Gegeben sind die Funktionen f_a durch

$$y = f_a(x) = \frac{2}{3}a^3 \cos^2 x \cdot \sin x \quad , \qquad x \in R,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ a \in R,\ a > 0.$$

Ihre Graphen seien G_a.

a) Ermitteln Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen G_a mit den Koordinatenachsen, die Art und die Lage der lokalen Extrempunkte.

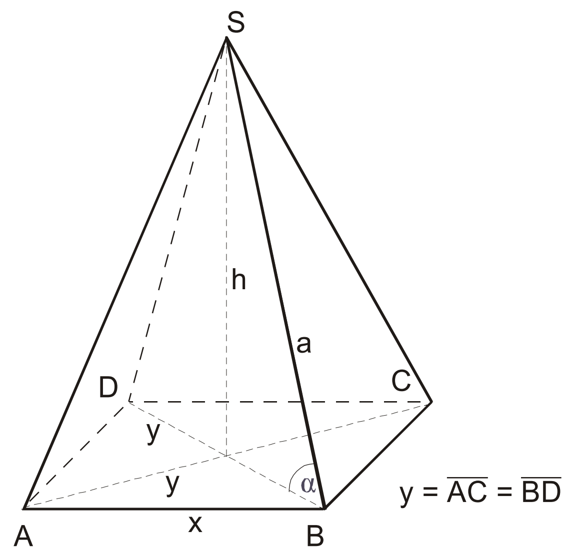
Zeichnen Sie den Graphen $G_{1,5}$.

b) Jeder der Graphen G_a und die x-Achse schließen eine Fläche vollständig ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Inhalts dieser Flächen.

c) Der Graph $G_{1,5}$ wird um zwei Einheiten in positive Richtung der y-Achse verschoben. Geben Sie für diesen verschobenen Graphen eine zugehörige Funktionsgleichung $y = f^*(x)$ und eine Gleichung für zugehörige Stammfunktionen $y = F^*(x)$ an.

Interpretieren Sie den Ausdruck $\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f^*(x)]^2dx$ mithilfe einer Skizze geometrisch.

d) Aus vier gleich langen Stäben wird das Gerüst für ein Zelt in Form einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche aufgestellt (siehe Abbildung).
Die Stäbe sind a = 2,00 m lang.
Das Gerüst soll so aufgestellt werden, dass das Volumen des Zeltes maximal wird.
Zur Berechnung des Volumens der Pyramide in Abhängigkeit von der Pyramidenhöhe h und der Grundkantenlänge x gilt die Gleichung $V(h,x) = \frac{1}{3}x^2h$.



(Abbildung nicht maßstäblich)

Entwickeln Sie eine Gleichung zur Berechnung des Volumens der Pyramide in Abhängigkeit des Neigungswinkels α, indem Sie diese Gleichung in die Form $V(\alpha)$ überführen.

[mögliches Ergebnis zur Kontrolle: $V(\alpha) = \frac{16}{3}\cos^2\alpha \cdot \sin\alpha$]

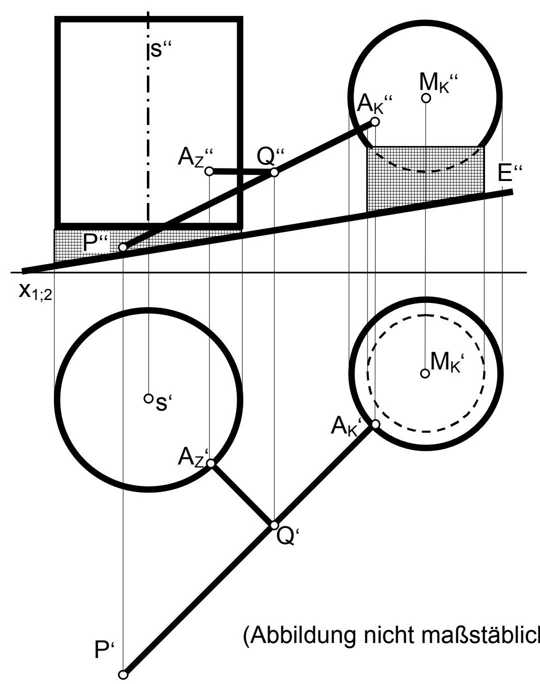
Berechnen Sie das Gradmaß des Neigungswinkels α und die Höhe h unter der Bedingung, dass das Volumen $V(\alpha)$ maximal ist und geben Sie das maximale Volumen an.

Gebiet L 2

Aufgabe 2.1
Analytische Geometrie

Zwei Apparate haben die Form einer Kugel bzw. eines geraden Kreiszylinders. Sie sollen in den Punkten A_K bzw. A_Z durch Rohrleitungen an den Versorgungspunkt P angeschlossen werden.

Die Standorte der Apparate und der Rohrleitungsverlauf sind im Grund- und Aufriss dargestellt. Eine analytische Beschreibung erfolgt in einem kartesischen Koordinatensystem, wobei die x-y-Ebene der Horizontalebene (in der Darstellung die Grundrissebene) und eine Einheit einem Meter entspricht.



(Abbildung nicht maßstäblich)

Gegeben sind:
- der Punkt P(16 | 4 | 1),
- der Radius des Zylinders $r_Z = 3{,}50$ m,
- die Symmetrieachse s des Zylinders durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ z \end{pmatrix}, \quad z \in R$,
- die Kugel durch $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 32y - 14z = -312$,
- die Ebene E durch $y - 6z = 0$.

a) Ermitteln Sie den Radius und die Koordinaten des Mittelpunktes M_K des kugelförmigen Apparates.

Stellen Sie eine Gleichung der Geraden PM_K auf und berechnen Sie die Koordinaten des Anschlusspunktes A_K, der auf dieser Geraden liegt.

b) Die Apparate sind auf einem ebenen Fundament aufgestellt, dessen Lage durch Punkte der Ebene E beschrieben wird.
Berechnen Sie das Gradmaß des Neigungswinkels des Fundamentes zur Horizontalebene sowie das Gradmaß des Neigungswinkels der Rohrleitung $\overline{PA_k}$ zum Fundament.

In der Betriebsvorschrift wird gefordert, dass die Rohrleitung eine Höhe von 4,00 m über dem Fundament nicht überschreiten darf. (Die Höhe werde senkrecht zur Horizontalebene betrachtet.)
Prüfen Sie, ob diese Bestimmung eingehalten wird.

c) Auf der Rohrleitung $\overline{PA_K}$ soll ein Abzweigpunkt Q so festgelegt werden, dass der Verlauf der Rohrleitung $\overline{QA_Z}$ durch Punkte einer Geraden QA_Z beschrieben wird. Die Gerade QA_z soll sowohl senkrecht zur Geraden PA_K als auch zur Symmetrieachse s sein.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes Q.

Eine Rohrleitung ist in der gegebenen Abbildung in wahrer Länge dargestellt.
Geben Sie an, um welche Rohrleitung es sich handelt, begründen Sie Ihre Aussage und berechnen Sie die Länge dieser Rohrleitung.

Gebiet L 2

Aufgabe 2.2
Analytische Geometrie

Gegeben seien in einem kartesischen Koordinatensystem

die Punkte A(0 | 0 | 2), B(3 | 4 | 5), C(–2 | 2 | 7) und P(10 | 12 | 10)

sowie die Kugel K mit der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 16y - 16z = -128$.

a) Begründen Sie, dass die Punkte A, B und C eine Ebene E bestimmen und geben Sie eine Koordinatengleichung dieser Ebene an.

Zeigen Sie, dass der Punkt P sowohl in der Ebene E als auch auf der Kugel K liegt.

b) Im Punkt P soll die Tangentialebene an die Kugel K gelegt werden.
Geben Sie eine Gleichung dieser Tangentialebene an.

Weisen Sie nach, dass diese Tangentialebene und die Ebene E zueinander orthogonal sind.

Durch Schnitt der Ebene E mit der Kugel K entsteht ein Schnittkreis.
Geben Sie die Koordinaten des Mittelpunktes und die Maßzahl des Radius dieses Kreises an.

Die Punkte Q(2 | 4 | 6), R(8 | 12 | 12) und S(4 | 4 | 4) sind Punkte des Schnittkreises aus Aufgabe b und die Strecke $\overline{PQ}$ ist ein Durchmesser dieses Kreises.

c) Weisen Sie nach, dass das Dreieck QRS rechtwinklig ist.

Zeigen Sie, dass die Lotfußpunkte der Lote von P auf die Seiten dieses Dreiecks bzw. deren Verlängerungen auf genau einer Geraden liegen.

d) Der Punkt D(4 | 12 | z_D>10) sei die Spitze einer über der Fläche PRQS errichteten und von der Kugel K umhüllten Pyramide.

Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens der Pyramide PRQSD.

Gebiet L 3

Aufgabe 3.1
Stochastik

Bei einer Wahl haben 10% der Wähler für die Partei Z gestimmt.

a) Berechnen Sie mit welcher Wahrscheinlichkeit unter 100 zufällig ausgewählten Wählern mehr als 4 und höchstens 9 für die Partei Z gestimmt haben.

b) Die Zufallsgröße X sei die Anzahl der Wähler der Partei Z in einer Stichprobe von 500 Wählern.
Begründen Sie, dass die Zufallsgröße X binomialverteilt ist.

Ermitteln Sie den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsgröße X.

Berechnen Sie, wie groß eine Stichprobe mindestens sein muss, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie mindestens einen Wähler der Partei Z enthält, mindestens 90% beträgt.

Zeigen Sie, dass sich für die Zufallsgröße X Wahrscheinlichkeiten $P(X \le k)$ näherungsweise durch die Funktion Φ mit $\Phi\left(\frac{k+0{,}5-50}{3\sqrt{5}}\right)$ berechnen lassen.

Die Partei Z will eine Werbekampagne durchführen, wenn der Bekanntheitsgrad ihrer wichtigsten politischen Zielstellungen unter 70 % liegt. Die Entscheidung für eine solche Werbekampagne soll auf der Grundlage einer Umfrage unter 1500 zufällig ausgewählten wahlberechtigten Personen getroffen werden.

c) Entwickeln Sie einen Test, bei dem die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Werbekampagne irrtümlich durchgeführt wird, höchstens 5 % beträgt.

Ermitteln Sie für diesen Test eine Entscheidungsregel.

Gebiet L 3

Aufgabe 3.2
Stochastik

Ein Batterieproduzent hat Batterien einer bestimmten Sorte im Dauerbetrieb geprüft. Es ist festgestellt worden, dass die Wahrscheinlichkeit für den vorzeitigen Ausfall einer Batterie 20 % beträgt.

a) Ermitteln Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse.
   A: Von 100 Batterien fallen weniger als ein Viertel vorzeitig aus.
   B: Von 200 Batterien fallen höchstens 40 vorzeitig aus.
   C: Von vier Batterien fallen mindestens zwei vorzeitig aus.

b) Berechnen Sie, wie hoch der Anteil der vorzeitig ausfallenden Batterien mindestens sein muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % unter 100 Batterien mindestens eine vorzeitig ausfällt.

Die Wahrscheinlichkeit eines vorzeitigen Ausfalls beträgt 5 %, wenn die Batterien nach einem anderen Verfahren produziert worden sind. Es werden 100 solcher Batterien geprüft.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens vier, höchstens aber acht Batterien vorzeitig ausfallen.

   Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit genau vier Batterien vorzeitig ausfallen, jedoch keine der ersten 25 geprüften Batterien.

In Auswertung umfangreicher Batterieprüfungen vermutet man, dass der Anteil vorzeitig ausfallender Batterien weniger als 5 % beträgt. Um diese Vermutung zu beurteilen, soll eine Stichprobe von 100 Batterien geprüft werden.

d) Entwickeln Sie hierfür einen Signifikanztest auf dem Signifikanzniveau α = 10 % und formulieren Sie eine Entscheidungsregel.

Gebiet L 1 **Aufgabe 1.1**
Analysis

Aufgabe	BE	Hinweise, Lösungen

a)

5 Untersuchen des Verhaltens von f_a für $t \to \pm\infty$ und Angeben von Asymptotengleichungen, z. B.:

$$\lim_{t\to\infty} f_a(t) = 2 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{t\to-\infty} f_a(t) = 0\,, \quad y = 2 \text{ bzw. } y = 0$$

4 Zeigen, dass f_a monoton steigt, z. B.:

$$f_a'(t) = \frac{58a \cdot e^{a\cdot t}}{\left(e^{a\cdot t} + 29\right)^2}\,, \quad f_a'(t) > 0 \text{ für alle } t \in D_f \quad \Rightarrow \quad f_a \text{ ist monoton steigend}$$

b)

3 Untersuchen auf Existenz von Nullstellen und lokalen Extremstellen, z. B.:

$f_a(t) \neq 0$ für alle Werte von t $\Rightarrow$ keine Nullstellen

f_a monoton steigend und stetig $\Rightarrow$ keine lokalen Extremstellen

6 Zeigen, dass alle Wendepunkte auf einer Parallelen zur t-Achse liegen, z. B.:

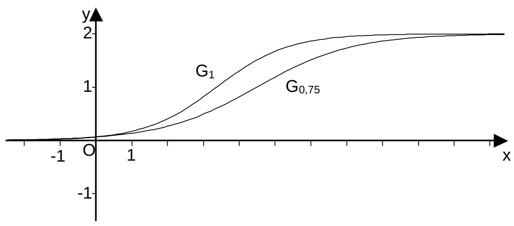
$$f_a''(t) = \frac{58a^2 \cdot e^{a\cdot t} \cdot \left(29 - e^{a\cdot t}\right)}{\left(29 + e^{a\cdot t}\right)^3}\,,$$

notwendige Bedingung für Wendepunkte nur für $t = \frac{\ln 29}{a}$ erfüllt,

$f_a\left(\frac{\ln 29}{a}\right) = 1 \Rightarrow$ Alle Wendepunkte liegen auf einer Parallelen zur t-Achse.

8 Zeichnen der Graphen $G_{0,75}$ und G_1 und Schlussfolgerung, z. B.:

- Die Wendestellen werden mit größer werdenden Werten für a kleiner.
- Je größer der Wert von a, desto größer ist der Anstieg der Wendetangenten.



c)

8 Berechnen der Maßzahl des Inhalts der Fläche, z. B.:

$$A = \int_{-\infty}^{\ln 29} 2\frac{e^t}{e^t + 29}\,dt = [2 \cdot \ln(e^t + 29)]_{-\infty}^{\ln 29} = 2 \cdot \ln 2 \approx 1{,}39$$

d)

3 Berechnen der Höhen, z. B.:

Zeit in Tagen	10	50	150
Höhe in Metern	0,10	0,41	1,87

4 Berechnen, wann die Wachstumsgeschwindigkeit am größten ist, z. B.:

Zeitpunkt entspricht der Wendestelle der Funktion f_a für a = 0,04 (vgl. Teilaufgabe b) $\Rightarrow t = \frac{\ln 29}{0{,}04} \approx 84{,}2$.

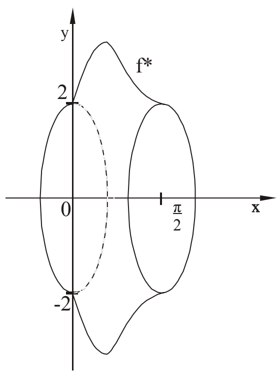
Etwa am 84. Tag hat die Pflanze ihre maximale Wachstumsgeschwindigkeit erreicht.

4 Erläutern von Grenzen der Modellbildung, z. B.:

- Die Modellbildung macht Aussagen über das mittlere Wachstum von Pflanzen, d. h. es ist keine Aussage über das Wachstum einer einzelnen Pflanze möglich.
- Der Modellbildung liegen definierte Wachstumsbedingungen zugrunde, d. h. davon abweichende Bedingungen können den Pflanzenwuchs verändern.

45

Gebiet L 1 **Aufgabe 1.2**
Analysis

Auf-gabe	BE	Hinweise, Lösungen
a)	15	Ermitteln der Koordinaten der Schnittpunkte und der lokalen Extrempunkte, z. B.: Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen: $S_{x1}(0 \mid 0) = S_y$; $S_{x2}(\frac{\pi}{2} \mid 0)$ Art und Lage der lokalen Extrempunkte: $f_a{}'(x) = \frac{2}{3}a^3(\cos^3 x - 2\sin^2 x \cdot \cos x)$; $f_a{}''(x) = \frac{2}{3}a^3(2\sin^3 x - 7\cos^2 x \cdot \sin x)$ Hinreichendes Kriterium für den Hochpunkt $H(0{,}615 \mid 0{,}257a^3)$ erfüllt, wobei $f_a{}''(0{,}615) = -1{,}54a^3$; (x = $\frac{\pi}{2}$ entfällt wegen „Randlage“)
	4	Zeichnen des Graphen $G_{1,5}$
b)	7	Berechnen der Maßzahl des Flächeninhalts, z. B.: $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_a(x)dx = \left[-\frac{2}{9}a^3\cos^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{9}a^3$
c)	3	Angeben der Funktionsgleichungen, z. B.: $f^*(x) = f_{1,5}(x) + 2 \quad \Rightarrow \quad F^*(x) = F_{1,5}(x) + 2x + C$
	4	Interpretieren des Ausdrucks, z. B.: Mit dem Ausdruck wird das Volumen eines Rotationskörpers berechnet. Der Rotationskörper wird vom Graphen der Funktion f^* im Intervall $[0 ; \frac{\pi}{2}]$ bei Rotation um die x-Achse erzeugt. 
d)	5	Entwickeln einer Gleichung, z. B.: (I) $\sin\alpha = \frac{h}{2}$; (II) $\cos\alpha = \frac{y}{4}$; (III) $y^2 = 2x^2$ Aus (I), (II) und (III) folgt: $V(\alpha) = \frac{16}{3}\cos^2\alpha \cdot \sin\alpha$
	7	Berechnen des Gradmaßes des Neigungswinkels und der Höhe sowie Angeben des maximalen Volumens, z. B.: Zusammenhang zwischen der Zielfunktion V mit $V = V(\alpha)$, $0 < \alpha < 90°$ und $V \rightarrow$ Max mit den Funktionen f_a herstellen; Ergebnisse aus Aufgabenteil a nutzen $x_{max} = 0{,}615 = \hat{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 35{,}2°$ Höhe: 1,15 m Maximales Volumen: 2,05 m^3
	45	

Gebiet L 2 **Aufgabe 2.1**
Analytische Geometrie

Auf-gabe	**BE**	**Hinweise, Lösungen**
a)	3	Ermitteln von Radius und Mittelpunkt, z. B.: $M_K(4 \mid 16 \mid 7)$, $r = 3{,}00$ m
	7	Aufstellen einer Gleichung der Geraden und Berechnen der Koordinaten des Anschlusspunktes A_K, z. B.: $\vec{x} = \begin{pmatrix}16\\4\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$, $t \in R$ A_K ist ein Durchstoßpunkt der Geraden PM_K mit der Kugel: $(12 - 2t)^2 + (-12 + 2t)^2 + (-6 + t)^2 = 9$ $\Rightarrow$ $t_1 = 5$, $t_2 = 7$ (entfällt) $\Rightarrow$ $A_K(6 \mid 14 \mid 6)$
b)	5	Berechnen des Gradmaßes der Neigungswinkel, z. B.: Neigungswinkel des Fundamentes zur Horizontalebene: $\cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{37}}$ $\Rightarrow$ $\alpha \approx 9{,}5°$ Neigungswinkel der Rohrleitung zum Fundament: $\sin\beta = \frac{4}{3\sqrt{37}}$ $\Rightarrow$ $\beta \approx 12{,}7°$
	4	Prüfen, ob Bestimmung eingehalten wird, z. B.: (1) Maßzahl der Höhe des höchsten Punktes A_K über der Horizontalebene: $z_{A_K} = 6$ (2) Maßzahl der Höhe der Projektion von A_K auf E über der Horizontalebene: $14 \cdot \tan\alpha$ (1) $\wedge$ (2) $\Rightarrow$ $h = (6 - 14\cdot\tan\alpha)$ m $\approx 3{,}67$ m $< 4{,}00$ m Die Bestimmung wird eingehalten.
c)	5	Berechnen der Koordinaten des Punktes Q, z. B.: $\vec{v}_{PA_K} \perp \vec{v}_{QA_Z} \wedge \vec{v}_{QA_Z} \perp s$ $\Rightarrow$ $\vec{v}_{QA_Z} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}16\\4\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\5\\z\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $t = 3$, $u = 5$, $Q(10 \mid 10 \mid 4)$
	6	Angeben der Rohrleitung, Begründen der Aussage und Berechnen der Länge, z. B.: Die Rohrleitung $\overline{QA_Z}$ wird im Grundriss in wahrer Länge abgebildet, da diese parallel zur Grundrissebene verläuft, was am parallelen Verlauf des Aufrisses zur Rissachse zu erkennen ist. $\overline{Q'A'_Z} = d(Q', s') - r_Z = (5\sqrt{2} - 3{,}50) \approx 3{,}57$ Länge der Rohrleitung: 3,57 m
	30	

Gebiet L 2

Aufgabe 2.2
Analytische Geometrie

Auf-gabe	**BE**	**Hinweise, Lösungen**
a)	6	Begründen, dass die Punkte eine Ebene bestimmen und Angeben einer Koordinatengleichung, z. B.: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ linear unabhängig voneinander E: $2x - 3y + 2z - 4 = 0$
	2	Zeigen, dass der Punkt P sowohl in der Ebene als auch auf der Kugel liegt, z. B.: durch Einsetzen der Punktkoordinaten
b)	4	Angeben einer Gleichung für die Tangentialebene, z. B.: E_T: $4x + 4y + 2z - 108 = 0$
	2	Nachweisen der Orthogonalität, z. B.: $\overrightarrow{n_E} \cdot \overrightarrow{n_{E_T}} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_T \perp E$
	3	Angeben der Mittelpunktskoordinaten und der Maßzahl des Radius, z. B.: Der Mittelpunkt der Kugel K liegt in der Ebene E. $\Rightarrow$ $M_s(6 \mid 8 \mid 8)$, $r_s = 6$
c)	6	Nachweisen, dass das Dreieck QRS rechtwinklig ist und Zeigen, dass die Lotfußpunkte auf genau einer Geraden liegen, z. B.: $\overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{QS} = 0 \quad \Rightarrow \quad QR \perp QS$ $\overline{RS}$ und $\overline{PQ}$ sind Durchmesser dieses Kreises $\Rightarrow \angle QSP = \angle QRP = 90° \quad \Rightarrow \quad L_{QS} = S$, $L_{QR} = R$ $L_{RS} \in RS$
d)	7	Berechnen der Volumenmaßzahl, z. B.: $z_D = 12$; $V = \frac{1}{3} \lvert (\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PS}) \cdot \overrightarrow{PD} \rvert = \frac{64}{3}$
	30	

Gebiet L 3 **Aufgabe 3.1**
Stochastik

Auf-gabe	BE	Hinweise, Lösungen
a)	3	Berechnen der Wahrscheinlichkeit, z. B.: W: Anzahl der Wähler der Partei Z; $W \sim B_{100;\,0,1}$ $P(4 < W \le 9) = P(W \le 9) - P(W \le 4) = 0{,}4276$
b)	3	Begründen, dass ZG X binomialverteilt ist, z. B.: (1) Jeder Wähler hat genau zwei Entscheidungsmöglichkeiten. (2) Für jeden Wähler ist die Erfolgswahrscheinlichkeit (p = 0,1) gleich. (3) Alle Wähler wählen unabhängig voneinander.
	2	Ermitteln von Erwartungswert und Varianz, z. B.: $E(X) = 50$; $V(X) = 45$
	5	Berechnen des Stichprobenumfangs, z. B.: $P(X \ge 1) = 1 - P(X = 0) \ge 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad P(X = 0) \le 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad \binom{n}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^n \le 0{,}1$ $\Rightarrow n \ge 21{,}85...$ Mindestumfang der Stichprobe: 22
	3	Zeigen, dass Näherung möglich ist, z. B.: (1) $X \sim B_{n;\,p}$; n hinreichend groß; $P(X \le k) \approx \Phi\left(\frac{k + 0{,}5 - \mu}{\sigma}\right)$ (2) $\Phi\left(\frac{k + 0{,}5 - 50}{3\sqrt{5}}\right) \quad \Rightarrow \quad \mu = 50$ und $\sigma = 3\sqrt{5}$; $E(X) = \mu = 50$; $V(X) = \sigma^2 = 45$
c)	9	Entwickeln eines Tests und Ermitteln einer Entscheidungsregel, z. B.: Y: Anzahl der Personen unter den 1500 Befragten, die die Zielstellungen der Partei Z kennen; $Y \sim B_{1500;\,0,7}$ (bei wahrer H_0); $\alpha = 0{,}05$ H_0: $p_0 \ge 0{,}70$; kleine Werte von Y sprechen gegen H_0. $\Rightarrow$ linksseitiger Signifikanztest mit $\overline{A} = \{0; 1; ...; k\}$; empirisches Kriterium $V(Y) > 9$ erfüllt, denn $V(Y) = 315 > 9$ $P(Y \le k) \approx \Phi\left(\frac{k - \mu + 0{,}5}{\sigma}\right)$ $\mu = 1500 \cdot 0{,}7 = 1050$; $\sigma = \sqrt{315}$ $P(Y \le k) \le 0{,}05 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k - 1050 + 0{,}5}{\sqrt{315}} \le -1{,}64 \quad \Rightarrow \quad k \le 1020{,}4$ Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{0; 1; ...; 1020\}$ Wenn weniger als 1021 Befragte die Zielstellungen der Partei Z kennen, dann ist die Werbekampagne durchzuführen.
	25	

Gebiet L 3 **Aufgabe 3.2**
Stochastik

Auf-gabe	BE	Hinweise, Lösungen
a)	6	Ermitteln der Wahrscheinlichkeiten, z. B.: X_n: Anzahl der vorzeitig ausfallenden Batterien; $X_n \sim B_{n;\,0,2}$ $P(A) = P(X_{100} \le 24) = B_{100;\,0,2}(\{0; 1; ...; 24\}) = 0,8686$ $P(B) = P(X_{200} \le 40) = B_{200;\,0,2}(\{0; 1; ...; 40\}) = 0,5422$ $P(C) = P(X_4 \ge 2) = B_{4;\,0,2}(\{2; 3; 4\}) = 1 - B_{4;\,0,2}(\{0; 1\}) = 1 - 0,8192 = 0,1808$
b)	5	Berechnen des Mindestanteils, z. B.: X_p: Anzahl der vorzeitig ausfallenden Batterien; $X_p \sim B_{100;\,p}$ $P(X_p \ge 1) = 1 - P(X_p = 0) \ge 0,99 \quad \Leftrightarrow \quad P(X_p = 0) \le 0,01$ $P(X_p = 0) = (1-p)^{100}$ $(1-p)^{100} \le 0,01 \quad \Leftrightarrow \quad p \ge 1 - \sqrt[100]{0,01} \quad \Rightarrow \quad p \ge 0,045...$ Mindestanteil: $\approx 4,5\ \%$
c)	7	Berechnen der gesuchten Wahrscheinlichkeiten, z. B.: Y: Anzahl der vorzeitig ausfallenden Batterien; $Y \sim B_{100;\,0,05}$ $P(4 \le Y \le 8) = P(Y \le 8) - P(Y \le 3) = 0,9369 - 0,2578 = 0,6791$ A sei das beschriebene Ereignis, das sich aus der Verknüpfung der unvereinbaren Ereignisse A1 „Unter den ersten 25 von 100 kein vorzeitiger Ausfall“ und A2 „Unter den letzten 75 von 100 genau vier vorzeitige Ausfälle“ ergibt. $P(A1) = 0,95^{25} \approx 0,2774; \quad P(A2) = \binom{75}{4} \cdot 0,05^4 \cdot 0,95^{71} \approx 0,1991$ $P(A) = P(A1 \cap A2) = P(A1) \cdot P(A2) \approx 0,0552$
d)	7	Entwickeln eines zugehörigen Signifikanztests und Formulieren einer Entscheidungsregel, z. B.: X: Anzahl der vorzeitig ausfallenden Batterien; $X \sim B_{100;\,0,05}$ H_0: $p_0 \ge 0,05$; kleine Werte von X sprechen gegen H_0 $\Rightarrow$ linksseitiger Signifikanztest mit $\overline{A} = \{0; 1; ...; k\}$ $P(X \le k) = B_{100;\,0,05}(\{0; 1; ...; k\}) \le 0,10 \quad \Rightarrow \quad k = 1;\ \overline{A} = \{0; 1\}$ Entscheidungsregel: Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn höchstens eine Batterie in der Stichprobe vorzeitig ausfällt.
	25	