LAND BRANDENBURG

Ministerium für Bildung, Jugend und Sport

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2005

Mathematik

Grundkurs

Aufgabenstellungen A1 und A2 für Schülerinnen und Schüler
(Wahl für Schülerinnen und Schüler)

Aufgabenstellungen A3 (siehe Extrablatt)
(wird durch die Lehrkraft ausgewählt)

Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache, nicht programmierbarer und nicht grafikfähiger Taschenrechner, an der Schule eingeführtes Tafelwerk/Formelsammlung
Gesamtbearbeitungszeit:	3 Zeitstunden

Wahlthemen

Aufgabenstellung A1

Thema/Inhalt: Analysis II

Hinweise: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 1.1 oder 1.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung A2

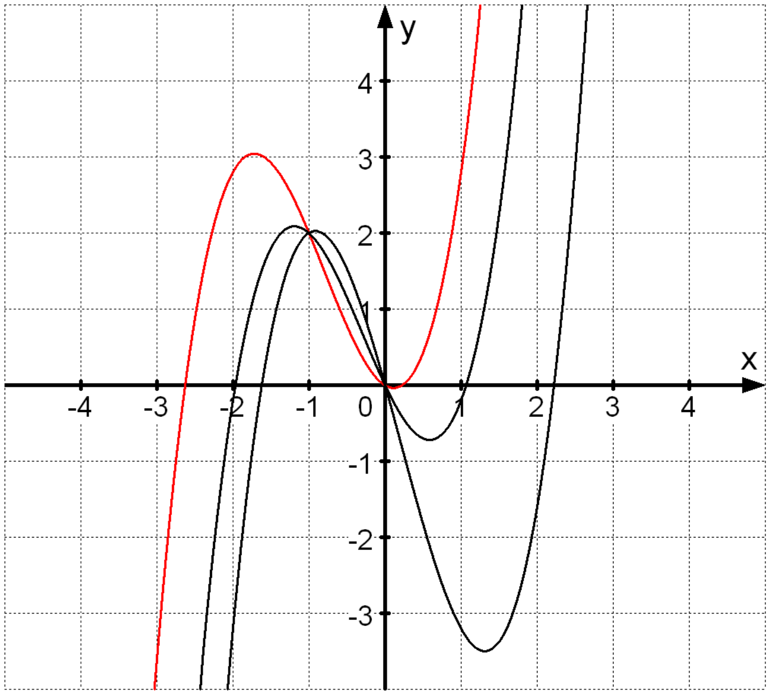
Thema/Inhalt: Analytische Geometrie II/ Lineare Algebra

Hinweise: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabe 1.1 (Analysis II)

Im Koordinatensystem sind einige Graphen K_a der Funktionenschar

f_a mit $f_a(x)=x^3+(3-3a)x^2-3ax$; $x\in R$; $a\in R$ dargestellt.



1.1.1 Zeigen Sie, dass jeder Graph K_a genau einen Wendepunkt $W_a(a-1|-2a^3+3a^2-3a+2)$ besitzt.

1.1.2 Bestimmen Sie eine Gleichung der Wendetangente (Tangente im Wendepunkt) an K_1.

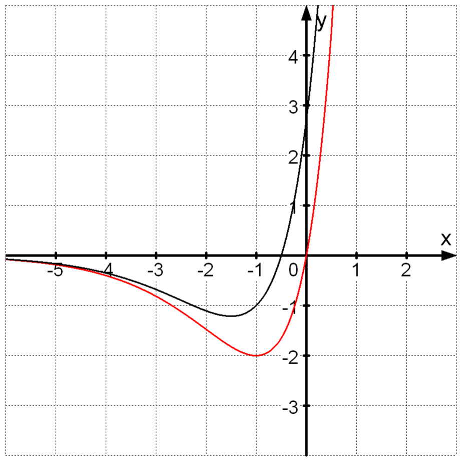
Ein Graph der Schar f_a hat eine Wendetangente, deren Anstieg größer ist als der Anstieg aller anderen Wendetangenten an K_a.
Ermitteln Sie den zugehörigen Parameter a und geben Sie diesen größtmöglichen Anstieg an.

1.1.3 Der Graph $K_{\frac{3}{2}}$ und die x-Achse begrenzen zwei Flächen vollständig. Ermitteln Sie das Verhältnis der beiden Flächeninhalte.

Für eine Kurve K_a sind die beiden beschriebenen Flächen gleich groß.
Bestimmen Sie a.

Aufgabe 1.2 (Analysis II)

Im Koordinatensystem sind die Graphen G_0 und G_1 der Funktionen f_0 mit $f_0(x)=2x\cdot e^{1+x}$; $x\in R$ und f_1 mit $f_1(x)=(2x+1)\cdot e^{1+x}$; $x\in R$ dargestellt.



1.2.1 Weisen Sie nach, dass der Punkt $T(-1|y_T)$ ein lokaler Tiefpunkt des Graphen G_0 ist und berechnen Sie y_T.

Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes von G_0.

1.2.2 Durch einen im III. Quadranten liegenden Punkt *R* des Graphen G_0 verlaufe eine Parallele zur *y*-Achse. Ihr Schnittpunkt mit der *x*-Achse sei *P*, der Koordinatenursprung sei *O*.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes *R* so, dass das Dreieck *OPR* einen maximalen Flächeninhalt annimmt.

1.2.3 Die Graphen G_0 und G_1 sowie die Geraden $x=-2$ und $x=-1$ schließen eine Fläche vollständig ein. Berechnen Sie deren Flächeninhalt.

1.2.4 Die Funktionen f_o und f_1 gehören zur Funktionenschar f_a mit $f_a(x)=(2x+a)\cdot e^{1+x}$; $x\in R$; $a\in R$.

Die Tangenten an den jeweiligen Graphen der Schar f_a im Punkt $A(-1\,|\,f_a(-1))$ seien $t_a:\ y=m_a\,x+n_a$.
Leiten Sie einen funktionalen Zusammenhang zwischen n_a und m_a für diese Tangenten her.

Begründen Sie, dass es genau eine Kurve der Schar f_a gibt, deren Tangente t_a mit den beiden Koordinatenachsen ein gleichschenkliges Dreieck begrenzt.
Ermitteln Sie den zugehörigen Parameter *a*.

Aufgabe 2.1 (Analytische Geometrie II/ Lineare Algebra)

Gegeben sind die Punkte $A(2\,|\,2\,|\,-1)$, $B(5\,|\,6\,|\,3)$, $C(11\,|\,6\,|\,2)$ und $D(-1\,|\,0\,|\,0)$ sowie die Gerade g mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $t \in R$.

2.1.1 Geben Sie eine Parametergleichung für die Ebene *E* an, die durch die Punkte *A*, *B* und *C* festgelegt wird. Formen Sie diese Gleichung in eine Koordinatenform um.

Zeigen Sie, dass die Ebene *E* ebenfalls durch die Gleichung $-x + 6{,}75y - 6z = 17{,}5$ beschrieben werden kann.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes *S* der Geraden *g* mit der Ebene *E*.

2.1.2 Die Punkte *A*, *B* und *C* seien Eckpunkte eines Dreiecks *ABC*.

Berechnen Sie die Größe des Innenwinkels *BAC* und ermitteln Sie den Flächeninhalt des Dreiecks *ABC*.

Zeigen Sie, dass die Punkte *A, B, C* und *D* Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide sind.

Stellen Sie diese Pyramide in einem räumlichen Koordinatensystem graphisch dar.

2.1.3 Durch die Punkte *B* und *D* sei die Gerade *h* festgelegt. Auf *h* liegt ein Punkt *Q*, für den $\overrightarrow{AQ} \perp h$ gilt. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes *Q.*

Der Punkt *M* sei der Mittelpunkt der Seitenkante CD der in Teilaufgabe 2.1.2 beschriebenen Pyramide *ABCD*. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes *M*.

Innerhalb der Seitenkante *DB* existiert genau ein Punkt *P* mit der Eigenschaft $\overline{AP} = \overline{AM}$. Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Punktes *P*.

Aufgabe 2.2 (Analytische Geometrie II/ Lineare Algebra)

Gegeben sind die Ebene E mit der Gleichung $-2x + y + 4z = 7$, die Ebene F mit der Gleichung $x - 2y + z = 7$ sowie die Gerade g mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; t \in R$ und die Gerade h durch den Punkt $R(3\,|\,-3\,|\,4)$ mit dem Richtungsvektor $\vec{a}_h = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2.2.1 Weisen Sie nach, dass die Gerade h in der Ebene E liegt.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden g und h und zeigen Sie, dass sie sich senkrecht schneiden.

Kontrollergebnis: $S(2\,|\,-1\,|\,3)$

Stellen Sie die Geraden g und h mit ihrem Schnittpunkt S in einem räumlichen Koordinatensystem graphisch dar.

Die Punkte R, S und der Koordinatenursprung O sind Eckpunkte eines Dreiecks. Berechnen Sie die Größe des Innenwinkels ROS.

2.2.2 Ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgeraden g_s der beiden Ebenen E und F.

Zeigen Sie, dass diese Schnittgerade auch durch die Gleichung der Geraden g beschrieben werden kann.

P sei der Durchstoßpunkt der y-Achse durch die Ebene E, Q der Spurpunkt der Geraden g in der x-z-Koordinatenebene.
Berechnen Sie die Entfernung der Punkte P und Q voneinander.

2.2.3 Der Punkt R, der Schnittpunkt S der orthogonalen Geraden g und h, ein weiterer Punkt T auf der Geraden g und ein Punkt U sollen die Eckpunkte eines Rechtecks $RSTU$ sein, dessen Flächeninhalt die Maßzahl $A = \sqrt{336}$ hat.
Ermitteln Sie die Koordinaten eines möglichen Punktes T und des dazugehörigen Punktes U.

LAND BRANDENBURG

Ministerium für Bildung, Jugend und Sport

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2005

Mathematik

Grundkurs

Aufgabenstellung A3.1 für Schülerinnen und Schüler

(Wahl für Lehrkräfte)

Thema/Inhalt:	Stochastik II
Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache, nicht programmierbarer und nicht grafikfähiger Taschenrechner, an der Schule eingeführtes Tafelwerk/ Formelsammlung
Gesamtbearbeitungszeit:	3 Zeitstunden

Aufgaben:

3.1.1 Das "Frühstücksfernsehen" erfreut sich bei jenen, die zu dieser Sendezeit fernsehen, großer Beliebtheit: 55 % derer, die ihr Fernsehgerät einschalten, sehen eine der zum "Frühstücksfernsehen" gehörenden Sendungen "Morgenmagazin" (ARD und ZDF), "Punkt 6" (RTL) oder "Frühstücks-TV" (SAT.1).
Der Marktanteil des "Morgenmagazins" liegt bei durchschnittlich 21 %.

3.1.1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
Unter zehn zufällig ausgewählten Personen, die zu dieser Sendezeit fernsehen,
A: befindet sich höchstens eine Person, die am "Frühstücksfernsehen" teilnimmt.
B: befinden sich genau fünf Personen, die das "Frühstücksfernsehen" nicht verfolgen.

3.1.1.2 Wie viele Personen aus der Gruppe derer, die das Fernsehgerät frühmorgens einschalten, muss man mindestens auswählen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,9 wenigstens eine Person zu entdecken, die sich das "Morgenmagazin" (ARD und ZDF) anschaut?

3.1.2 Privatsender finanzieren sich weitgehend aus Werbeeinnahmen.
Im Abendprogramm einiger Privatsender wird die Werbung für ein neues Milchprodukt ausgestrahlt, die 20,4% der Bevölkerung erreicht. In der Gruppe der Zuschauer entscheiden sich 25% für den Kauf dieses Produktes. Sogar 4% derer, welche die Werbung nicht gesehen haben, kaufen das neue Milchprodukt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person
C: die Werbung gesehen und das Milchprodukt gekauft hat,
D: die Werbung nicht gesehen, aber das Produkt dennoch gekauft hat,
E: das Produkt kauft.

3.1.3 Ein Meinungsforschungsinstitut untersuchte die Fernsehgewohnheiten von Familien in Großstädten während der Sonntage.
Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X (Anzahl der Stunden, die an Sonntagen ferngesehen wird) wurde dabei wie folgt verallgemeinert:

x_i	0	1	2	3	4 und mehr
$P(X = x_i)$	0	p^2		p^3	0

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X = 2)$, d.h. die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei Stunden ferngesehen wird.
Bestimmen Sie p mit $0 < p < 1$ so, dass der Erwartungswert $E(X)$ minimal wird.

LAND BRANDENBURG

Ministerium für Bildung, Jugend und Sport

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2005

Mathematik

Grundkurs

Aufgabenstellung A3.2 für Schülerinnen und Schüler

(Wahl für Lehrkräfte)

Thema/Inhalt:	(Analysis III)
Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache, nicht programmierbarer und nicht grafikfähiger Taschenrechner, an der Schule eingeführtes Tafelwerk/Formelsammlung
Gesamtbearbeitungszeit:	3 Zeitstunden

Aufgaben:

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = \dfrac{2x-a}{x^2}$; $x \in D_{f_a}$; $a \in R,\ a \neq 0$.

Die Graphen der Schar f_a seien G_a.

3.2.1 Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich von f_a an und entscheiden Sie, welcher Art eventuell vorhandene nicht definierte Stellen sind.

Bestimmen Sie die Nullstellen von f_a.

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte für $x \to \pm\infty$.

Weisen Sie nach, dass die Graphen G_a weder achsensymmetrisch zur *y*-Achse noch punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung verlaufen.

3.2.2 Ermitteln Sie Koordinaten und Art der lokalen Extrempunkte von G_a .

Zeigen Sie, dass Hoch- und Tiefpunkt von Graphen mit betragsgleichem Parameter stets auf einer Ursprungsgeraden liegen.

Geben Sie eine Gleichung dieser Geraden an.

3.2.3 Es seien $A_1\left(1 \middle| y_1\right)$ und $A_2\left(1 \middle| y_2\right)$ zwei Punkte auf der Geraden $x = 1$, die auf den Graphen G_{a_1} und G_{a_2} liegen. Die Tangente an G_{a_1} im Punkt A_1 verlaufe senkrecht zur Tangente an G_{a_2} im Punkt A_2.
Leiten Sie für diesen Fall einen funktionalen Zusammenhang zwischen a_1 und a_2 her.

3.2.4 Die Fläche, die von G_1, der *x*-Achse sowie den Geraden $x = 0{,}5$ und $x = 2$ eingeschlossen wird, rotiere um die *x*-Achse.

Veranschaulichen Sie die beschriebene Fläche in einem geeigneten Koordinatensystem.

Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.

LAND BRANDENBURG

Ministerium für Bildung, Jugend und Sport

Zentrale schriftliche Abiturprüfung **2005**

Mathematik

Grundkurs

Aufgabenstellung A3.3 **für Schülerinnen und Schüler**
(Wahl für Lehrkräfte)

Thema/Inhalt:	(Analytische Geometrie III / Lineare Algebra)
Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache, nicht programmierbarer und nicht grafikfähiger Taschenrechner, an der Schule eingeführtes Tafelwerk/ Formelsammlung
Gesamtbearbeitungszeit:	3 Zeitstunden

Aufgaben:

Gegeben sind eine Ebene E mit der Gleichung $3x + y + z = 18$, eine Geradenschar g_a mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a+1 \\ 1 \\ a-1 \end{pmatrix}; a,t \in R$ sowie die Punkte $A(3|5|4)$, $B(-6|2|1)$ und $C(12|-1|10)$.

3.3.1 Berechnen Sie den Abstand des Punktes B von der Ebene E sowie vom Koordinatenursprung.

Vom Punkt B wird das Lot auf die Ebene E gefällt. Zeigen Sie, dass der Punkt A Fußpunkt dieses Lotes ist.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Bildpunktes B^*, der bei der Spiegelung des Punktes B an der Ebene E entsteht.

3.3.2 Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels α der Geraden g_{-2} mit der Ebene E.

Zeigen Sie, dass die Gerade g_{-2} parallel zur Geraden h durch den Punkt C mit dem Richtungsvektor $\vec{a}_h = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ verläuft.

Berechnen Sie den Abstand der beiden Geraden g_{-2} und h.

3.3.3 In der Geradenschar g_a existieren zwei Geraden g_{a_1} und g_{a_2} für die gilt:

- Die Gerade g_{a_1} ist senkrecht zur Ebene E.
- Die Gerade g_{a_2} verläuft parallel zur Ebene E.

Ermitteln Sie die beiden Parameterwerte a_1 und a_2.

Untersuchen Sie, ob ganzzahlige Parameter a_Z existieren, für welche die Geraden g_{a_Z} der Geradenschar g_a mit der Ebene E einen Winkel von 45° einschließen.