Sekundarstufe II

Beispiele für Abituraufgaben im Fach Mathematik

- Entwurf -

Handreichung für den Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe

Amt für Schule

2001

Herausgeber: Behörde für Schule, Jugend und Berufsbildung, Amt für Schule Hamburg, S 13/2.
Druck: BSJB Hamburg

Hamburger Schulen können die Handreichung von der Beschaffungsstelle V 243-2 beziehen.
Die Handreichung kann aber auch bei der Beratungsstelle Mathematik im Institut für Lehrerfortbildung, Felix-Dahn-Str. 3, 20357 Hamburg, bezogen werden.

Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Schule, Jugend und Berufsbildung
Amt für Schule

Beispiele für Abituraufgaben im Fach Mathematik

- Entwurf -

**Handreichung für den
Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe**

Referat: Mathematisch-naturwissenschaftlich-technischer Unterricht
Referatsleitung und
Fachreferent Mathematik: Werner Renz, S 13/2

Verfasser: Dr. Klaus Henning, Christianeum

September 2001

Inhaltsverzeichnis

1. Beispiel – Leistungskurs – Vertiefung Analysis

Potenzreihe einer transzendenten Funktion

Gegeben ist die Funktion $f : x \to \ln^2(x)$.

1.1 Beginnen Sie mit einigen Teilen der Kurvendiskussion - benötigt werden

- Definitionsbereich
- Nullstelle
- Extrema
- Wendestellen
- Wertebereich.

1.2 Fertigen Sie eine sinnvoll gute Skizze des Graphen der Funktion im Bereich $0 \le x \le 4$ an.

2. Jetzt geht es darum, die Funktion als Taylor-Reihe um a = 1 zu entwickeln.

(Im Weiteren sei unter T_n der Beginn der Taylor-Reihe bis einschließlich des Terms mit x^n - also ohne Restglied! - verstanden.)

2.1 Geben Sie die Reihe bis T_6 an.

2.2 Interpretieren Sie das Verhalten von f links und rechts von der Nullstelle auf Grund der ersten Glieder der Taylor-Reihe.

2.3 Machen Sie eine begründete Vermutung über die weiteren Koeffizienten der Reihe. Was können Sie dann über den Konvergenzbereich dieser Reihendarstellung aussagen?

3.1 Geben Sie eine Stammfunktion zu f an.

3.2 Die Fläche A_1 sei die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Bereich von x = 0.5 bis zur Nullstelle, A_2 entsprechend von der Nullstelle bis x = 1.5.

Bestimmen Sie die Maße μ_1 und μ_2 der beiden Flächen.

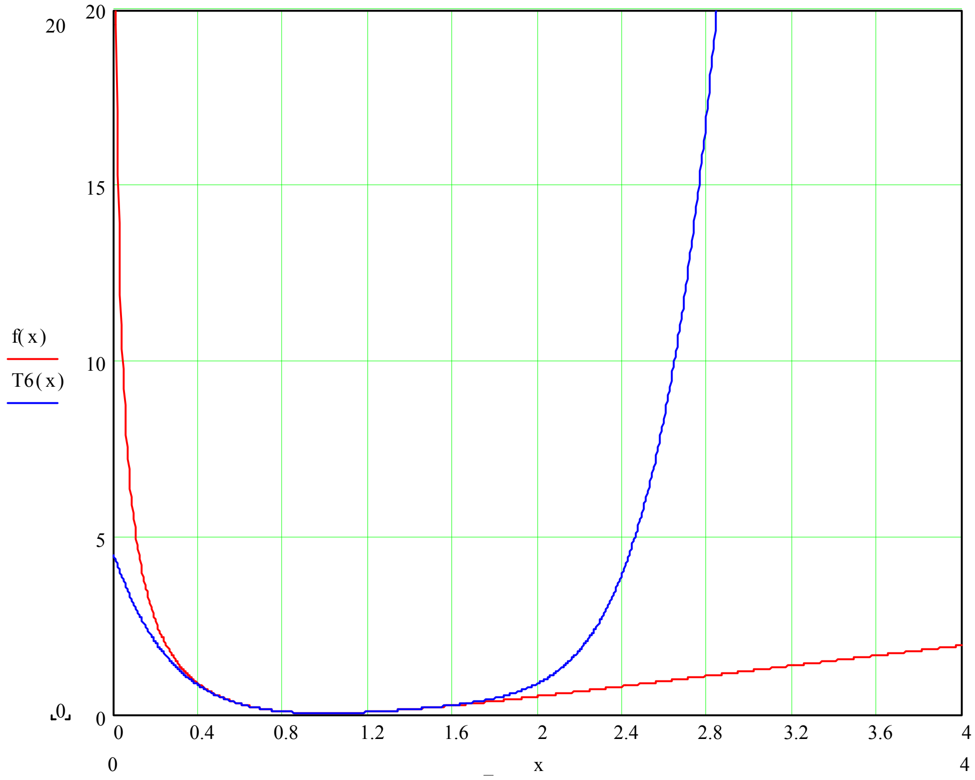
3.3 Die Taylor-Reihe ermöglicht eine näherungsweise Bestimmung der Flächenmaße μ_1 und μ_2 . Bestimmen Sie die Näherungen für μ_1 und μ_2 unter Verwendung von T_3 und vergleichen Sie Ihre Resultate mit denen aus 3.2 .

3.4 Vergleichen Sie weiterhin $\mu_1 + \mu_2$ mit dem Ergebnis einer Simpson-Näherung von x=0.5 bis x =1.5 mit nur drei Stützstellen (also vier Streifen) !

4. Kann man die Taylor-Reihe von f verwenden, um die Zahl e anzunähern ? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungen

1. (Niveau I); diese Darstellung enthält auch T(x)



2. Die ersten acht Ableitungen von f lauten

$$f'(x) = \frac{2\ln x}{x};\ f''(x) = \frac{2}{x^2}(1-\ln x)$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3}(2\ln x - 3);\ f^{iv}(x) = \frac{2}{x^4}(11 - 6\ln x)$$

:

$$f^{v}(x) = \frac{4}{x^5}(12\ln x - 25);\ f^{vi}(x) = \frac{4}{x^6}(137 - 60\ln x)$$

$$f^{vii}(x) = \frac{24}{x^7}(60\ln x - 147);\ f^{viii}(x) = \frac{72}{x^8}(363 - 140\ln x)$$

2.1. (Niveau II) Damit ergibt sich die geforderte Taylor-Reihe zu (die Glieder 7. und 8. Ordnung sind hier zusätzlich angegeben) :

$$T(x) = (x-1)^2 - (x-1)^3 + \frac{11}{12}(x-1)^4 - \frac{5}{6}(x-1)^5 + \frac{137}{180}(x-1)^6 - \frac{147}{210}(x-1)^7 + \frac{363}{560}(x-1)^8 - + \ldots$$

2.2. Die Nullstelle liegt bei $x = 1$. Hier sind nur der Anfangsterm, der Term 2. Ordnung, und nächstwichtig der Term 3. Ordnung von Bedeutung. Da der Term 2. Ordnung Anfangsterm ist, verhält sich f an der Nullstelle (2. Näherung) wie eine um 1 nach rechts verschobene Normalparabel (Niveau II). Der Term 3. Ordnung hat einen negativen Koeffizienten und bewirkt somit, dass f links von der Nullstelle oberhalb, rechts von der Nullstelle unterhalb der Parabel liegt (Niveau III).

2.3. Man kann berechtigterweise vermuten, dass die Koeffizienten eine Nullfolge bilden. Damit ist mit dem Leibnizkriterium der Konvergenzbereich $1 \leq x \leq 2$ (Niveau I) .Für den Bereich zwischen 0 und 1 sind alle Summanden negativ; da eine allgemeine Struktur der Koeffizienten nicht bekannt ist, kann hier (mit Quotientenkriterium) die Konvergenz nur gemutmaßt werden (Niveau II).

3. Eine Stammfunktion zu f ist $F(x) = x(\ln^2(x) - 2\ln x + 2)$.
Es ergeben sich damit folgende Werte (Niveau II) :

	4.3.1. : μ	4.3.2 : T3 - Näh.	4.3.3. Simpson
0.5 bis 1	0.066626312	0.057291667 ; rel. Abw.: 14.0 %	
1 bis 1.5	0.030207607	0.026041667 ; rel. Abw.: 13.8 %	
0.5 bis 1.5	0.096833919	0.083333333	0.097922587 ; rel. Abw.:-1.12 %

Die Taylor-Näherung ist also vergleichsweise schlecht, was an der langsamen Konvergenz der Koeffizienten liegt; dass sie oberhalb der Nullstelle geringfügig besser ist, liegt an der schwächeren Krümmung von f in diesem Bereich.
Die Simpson-Näherung erlaubt schon mit vier Streifen eine akzeptable Näherung. Auch hier allerdings gilt : f ist durch Polynome 2. Grades (diese verwendet letztlich die Simpson-Formel) schon bei einer geringen Entfernung von der Nullstelle nicht mehr gut darzustellen, weswegen für Simpson-Verhältnisse f schlecht genähert wird.
Also : f ist trotz des sehr glatten Verlaufs vergleichsweise schlecht numerisch integrierbar! (Niveau III)

4. Diese Frage erlaubt überraschenderweise Antworten in beide Richtungen :
   - f hat für keine leicht zugänglichen Argumente ein rationales Vielfaches von e als Wert (wie z.B. exp(1) = e oder, bei der p-Bestimmung, arcsin(0.5) = p/3), da der ln ja gerade die Umkehrfunktion zur exp-Funktion ist. Also : Nein, es geht nicht.
   - Andererseits : Es gilt natürlich f(e) = 1. Damit kann man für jedes k mit dem Taylor-Polynom T_k die Gleichung $T_k(x)=1$ lösen. Für T_2 ist dies einfach, T_3 und T_4 ermöglichen auch noch geschlossene Lösungen, danach muss man für die Lösungen der Polynomgleichungen wiederum Näherungsverfahren anwenden. Insgesamt bekommt man dennoch hiermit eine Folge von Näherungen von e. (Niveau III)

     (Bemerkung : Die so erhaltenen Näherungswerte überzeugen nicht sehr. Zunächst scheinen nur für gerade T_k die Lösungen oberhalb von 2 zu liegen, dann ist der Abstand zu e doch gewaltig. Ich habe die Lösung der Polynomialgleichungen bis zur 6. Stufe bestimmt :
     $n_2 = 2$; $n_3 = 0.245122$; $n_4 = 2.03004$; $n_5 = 0.340311$; $n_6 = 2.04589$)

Bemerkungen

- Diese Aufgabe entstammt dem Abiturjahrgang 1999.
- Sollte die Aufgabe zu umfangreich erscheinen, so kann entweder auf die Teilaufgabe 2.3 oder auf die Teilaufgabe 4. verzichtet werden.

Unterrichtsgang

Die Aufgabe entstammt im Wesentlichen dem Unterricht im 3. Halbjahr des Kurses. Hier ging es einerseits um Reihenentwicklung - vor allem angekoppelt an die Frage, wie transzendente, nicht einfach zu integrierende Funktionen dennoch numerisch integriert werden können, z.B. die Gauß-Funktion. Zur Theorie der Reihenentwicklung gehörten auch

- Konvergenzbetrachtungen mit Konvergenzkriterien (Quotientenkr., Wurzelkr., Leibnizkr.)
- Betrachtungen der linearen bzw. quadratischen Näherung von Funktionen
- Genauigkeitsbetrachtungen

Im Unterricht und in Arbeiten wurden intensiv folgende Funktionen unter ihrem Verhalten bei Reihenentwicklung untersucht :

- f(x) = exp(x) und f(x) = ln x
- Verteilungsfunktionen des Typs $f(x) = x^k \cdot e^{-x}$
- die Gauß-Funktion φ(x)
- die Winkelfunktionen
- f(x) = cosh(x)
- die Gamma-Funktion $\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (mit x = v/c) aus der speziellen Relativitätstheorie

Die Reihenentwicklungen vom arctan und vom sin wurden auf ihre Verwendungsfähigkeit hinsichtlich einer Näherung von π untersucht.

Als weitere (und häufig bessere) Möglichkeit zur näherungsweisen (numerischen) Integration ging es dann um die (eher schwache) Trapezregel und um die recht gut arbeitende Simpson-Regel.

Nicht erarbeitet (im Horizont der Aufgabe) wurden Methoden, die die Koeffizienten von Reihenentwicklungen jenseits der unmittelbaren Einsicht ergeben; auch die Frage der Bestimmung von e war nur bei der Exponentialfunktion selbst Thema.

2. Beispiel – Leistungskurs – Vertiefung Analysis

Iterative Mathematik

Gegeben ist die reelle Funktionenschar mit dem reellen Parameter k

$$gk : x \rightarrow x^2 + k \quad .$$

Diese Funktionenschar soll auf ihr Verhalten unter Iteration untersucht werden, mit anderen Worten, es geht um das Feigenbaum-Diagramm dieser Funktionenschar.
Begründen Sie jeweils Ihre Antworten.

1. Machen Sie sich mit der Schar vertraut - skizzieren Sie für einige (vielleicht vier) k-Werte den Graphen der jeweiligen Funktion.

   Bestimmen Sie - in Abhängigkeit von k - Nullstellen und Extrema; Sie werden dieses Wissen noch benötigen.
2. Welche Fixpunkte haben - in Abhängigkeit von k - die Funktionen *gk* ?
3. Für welche k-Bereiche sind diese Fixpunkte jeweils attraktiv, für welche repulsiv ?
4. Welche Startwerte würden Sie für die Iteration wählen ? (M. a. W., geben Sie jeweils den Attraktionsbereich an.)
5. Bei welchem k tritt die erste Bifurkation im Feigenbaum-Diagramm der *gk* auf ? (Sie sollten hier wirklich nachweisen, dass es sich um eine Bifurkation handelt !)
6. Wo ist der Übergang vom Quasi-Chaos zum Chaos ? Welchen k-Bereich umfasst also das Feigenbaum-Diagramm ?
7. Bei welchem k tritt die zweite Bifurkation im Feigenbaum-Diagramm auf ?
8. Schließlich - wie sieht das Feigenbaum-Diagramm im wesentlichen aus ?

Unterrichtsgang

Das 3. Semester hat das allgemeine Thema "Iterative Mathematik" mit dem ersten Schwerpunkt "Iteration von reellen Funktionen, periodische Punkte und Feigenbaumdiagramm".

- Eines der Ziele war das Kennen- und Erlernen der (zur Kurvendiskussion der klassischen Analysis analoge) "Feigenbaum-Diskussion" von Funktionenscharen mit den Bedingungen für "kritische Punkte" (Fixpunkte, Bifurkationen).

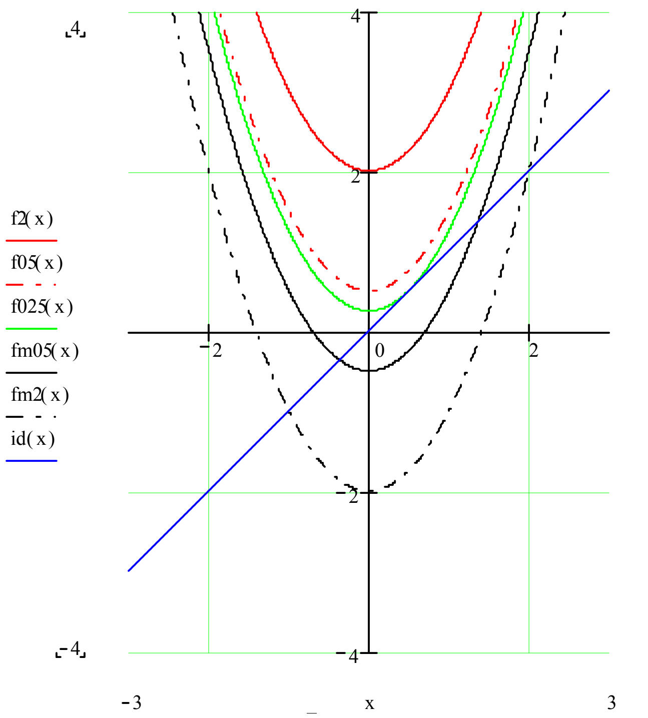
  Dabei war die Visualisierung der Sachverhalte, z.B. der Verhältnisse bei Fixpunkten an der Identität, wesentliches Verständnismittel.

  Diese Aufgabe stellt ein Beispiel für diese Diskussion dar.

- Alle notwendigen (und in den Lösungen erwähnten) Sätze waren Unterrichtsgegenstand.
- Die *Schwierigkeit* einer solchen Diskussion liegt letztlich darin, dass man sich in einem Feld von Funktionen aufhält, also praktisch zwei Variablen berücksichtigen muss (x und k).
- Der *Reiz* einer jeder solchen Aufgabe liegt darin, dass die "Feigenbaum-Diskussion" weniger automatisch abläuft als eine klassische Kurvendiskussion.
- *Nicht* behandelt wurden explizite Verfahren zur Erzeugung von Attraktionsbereichen, zum Finden von Bifurkationen höherer Ordnung, andere Bifurkationen als Periodenverdopplungsbifurkationen und auch nicht der Satz von Sarkovskij.

Lösungen

1. Die Nullstellen liegen bei $x_N = \pm\sqrt{k}$, das jeweils einzige Minimum bei E = (0 ; k) . Hier reicht je eine kurze Bemerkung.
   Skizze :



2. Die Fixpunkte ergeben sich aus der FPG $x_F = x_F^2 + k$ zu
   $x_{F1;2} = 0.5 \pm \sqrt{0.25 - k}$
   Also : keine FP für k > 0.25 ; ein FP für k = 0.25 ; zwei FP für k < 0. 25 .
3. <u>Sei k = 0.25</u> . Der FP $x_F = 0.5$ ist indifferent (nicht-hyperbolisch) (der Wert der zugehörigen Ableitung ist 1). Man erkennt aus der graphischen Darstellung, dass dieser FP linksseitig anziehend, rechtsseitig abstoßend ist.
   <u>Sei k < 0. 25</u>. Von beiden FP kann höchstens einer attraktiv sein. Aus der graphischen Darstellung erkennt man, dass es sich um den linken FP, also x_{F2}, handeln muss.
   Ein FP ist attraktiv, solange $|gk'(x_F)| = |2x_F| < 1$

Dies ist bei x_{F2} für k ∈] -0.75 ; -0.25 [der Fall.
An den Rändern dieses Intervalls ist dieser FP indifferent (siehe oben und siehe unten), für k < -0.75 repulsiv.

4. Das Bassin eines attraktiven FP umfasst alle die Zahlen x aus einem offenen Intervall I, die in der 1. Iteration in dieses offene Intervall abgebildet werden; aus der graphischen Darstellung kann man erkennen, dass es sich um das Intervall I =] $-x_{F1}$; x_{F1} [handelt.
5. Aus 3. entnimmt man: $k_b = -0.75$ (denn $gk_b'(x_{F2}) = -1$). Hinreichend dafür, dass k_b den ersten Bifurkationspunkt darstellt, ist nun $gk_b''(x_{F2}) \neq 0$. Da die 2. Ableitung jedes *gk* konstant 2 ist, ist diese Bedingung erfüllt und k_b damit der erste Bifurkationspunkt.
6. Der Übergang vom Quasi-Chaos zum Chaos tritt bei Funktionen dieser Art ein, wenn es aus dem Intervall I plötzlich Zahlen gibt, die nach außen abgebildet werden (und dem Attraktor Unendlich anheimfallen), m.a.W., wenn das Bassin des attraktiven FP nicht mehr zusammenhängend ist .
   Die Antwort zu dieser Frage ist schon graphisch zu ahnen: die Grenze liegt bei $k_C = -2$.
   Diese Lösung ergibt sich rechnerisch aus der Bedingung < Betrag des maximalen Funktionswertes muss noch im Attraktionsbereich liegen >, also : $-gk_C(x_E) = x_{F1}$.
7. Der langwierigste Teil der Aufgabe - zu bilden ist zunächst die zweite Iterationsstufe:
   $gk(gk(x)) = (x^2+k)^2 + k = x^4 + 2kx^2 + k^2 + k$
   Daraus ist die zugehörige FPG zu entwickeln: $x_F = x_F{}^4 + 2kx_F{}^2 + k^2 + k$
   Diese kann vier Nullstellen aufweisen. Die bisherigen FP sind mit Sicherheit Lösungen dieser FPG, also kann man durch entsprechende Linearfaktoren teilen. Sinnvoll ist dabei, gleich durch deren Produkt zu teilen:
   $$\frac{x_F^4 + 2kx_F^2 - x_F + k^2 + k}{x_F^2 - x_F + k} = x^2 + x + k + 1$$
   Die Lösungen des Restpolynoms sind die gesuchten periodischen Punkte der Ordnung 2:
   $$x_{Z1;2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-(k + \frac{3}{4})}$$
   Für solche Paare muss gelten, um sie zu einem attraktiven Zweierzyklus zu machen:
   $|(gk(gk(x_Z))'| < 1$,
   und die Bifurkation beginnt wieder am Rand des Intervalls.
   Dies ergibt hier: Die 2. Bifurkation liegt bei k = - 1.25.
8. Aus den bisherigen Werten ist dann leicht das Feigenbaum-Diagramm qualitativ zu erstellen.

Bemerkung

- Diese Aufgabe entstammt dem Abiturjahrgang 93.

3. Beispiel – Grundkurs – Vertiefung Analysis

Ableitungszyklische Funktionen

1. Geben Sie die Reihenentwicklung von Funktionen an, die auf **R** mit ihrer dritten Ableitung identisch sind. Es gibt davon drei; nennen Sie sie *f, g* und *h*.
   Weisen Sie die entscheidende Eigenschaft an Ihren Reihen jeweils nach.

2. Welche besondere Eigenschaften haben die drei Funktionen jeweils bei x = 0 ? Übrigens: *f* sei die Funktion, die *nicht* durch den Ursprung läuft.

Arbeiten Sie von nun an mit dem CAA-Programm MathCAD, dessen Handhabung Ihnen ja wohl vertraut ist; Sie wissen auch,
- dass ein Kommentar zu dem erwartet wird, was Sie den Rechner jeweils tun lassen;
- ebenso sollten die Namen neu eingeführter Variablen erläutert werden.

Verwenden Sie an Stelle der vollen Funktionen *f, g* und *h* nur die Reihennäherungen mit den ersten sieben von Null verschiedenen Gliedern. Diese Näherungen sollen fortan mit den Namen der Funktionen bezeichnet sein.

3. Stellen Sie einen Plot der drei Funktionen im Bereich [-10 ; 6] her.

4. Vergleichen Sie in $\mathbf{R}^+$ den Verlauf der Graphen mit dem der Exponentialfunktion exp(x). Sie werden leicht eine Vermutung aufstellen; versuchen Sie, diese durch ein Plausibilitäts-Argument zu beweisen.

5. Was fällt Ihnen in $\mathbf{R}^-$ an den Graphen auf? Können Sie Ihre Beobachtungen erklären?

(Hinweis für 4. und 5. : Vergleichen Sie in einem Plot die Exponentialfunktion mit der Summe Ihrer drei Funktionen.)

6. Bestimmen Sie die Schnittpunkte von *f* und *g* im Bereich [-4 ; 2] und den Inhalt der Fläche zwischen f und g zwischen den Schnittpunkten.

7. Bestimmen Sie die Schnittpunkte von *g* und *h* im Bereich [-4 ; 2] und den Inhalt der Fläche zwischen *g* und *h* zwischen den Schnittpunkten.

Lösungen

1. Ausgehend von der bekannten Reihenentwicklung der Exponentialfunktion erhält man drei Funktionen, deren dritte Ableitung mit der Funktion identisch ist, durch die Funktionen mit den Reihen
$f(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\frac{x^{12}}{12!}+\ldots\ ;\ g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{3k-2}}{(3k-2)!}\ ;\ h(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{3k-1}}{(3k-1)!}$.
Da bekannterweise die Reihe der Exponentialfunktion für alle reellen x konvergiert, konvergieren diese drei Reihen als Teilreihen auch.
Dass die drei Funktionen mit ihren dritten Ableitungen identisch sind, ergibt sich aus der Bildung bzw. durch einfaches Nachrechnen.

2. Es gilt:
$$f(0)=1\ ,\ f'(0)=0\ ,\ f''(0)=0\ ,\ f'''(0)=1$$
$$g(0)=0\ ,\ g'(0)=1\ ,\ g''(0)=0\ ,\ g'''(0)=0 \quad .$$
$$h(0)=0 \textit{ und } h'(0)=0=h^{iv}(0)=h^{v}(0)\ ; h''(0)=1$$

f hat also bei x = 0 eine Wendestelle mit waagerechter Tangente mit Krümmungswechsel links-rechts;
g eine Durchgangsnullstelle mit einer Tangentensteigung von 1 und
h eine Berührungsnullstelle (ein Minimum).

3. Die erwünschten Reihen-Anfänge lauten

$$f(x) := 1+\frac{x^3}{6}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\frac{x^{12}}{12!}+\frac{x^{15}}{15!}+\frac{x^{18}}{18!}$$

$$g(x) := x+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^{10}}{10!}+\frac{x^{13}}{13!}+\frac{x^{16}}{16!}+\frac{x^{19}}{19!}$$

$$h(x) := \frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}+\frac{x^{11}}{11!}+\frac{x^{14}}{14!}+\frac{x^{17}}{17!}+\frac{x^{20}}{20!}$$

Zur Darstellung siehe MathCAD-Blatt.

4. Die Beobachtung zeigt, dass alle drei Funktionen für wachsendes x einen Verlauf haben, der dem einer Exponentialfunktion gleicht.
Genauer gilt: $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty} h(x)=\frac{1}{3}\exp(x)$
Dies ist leicht einzusehen, da ja sozusagen die Exponentialfunktion in ihren Reihengliedern „gedrittelt“ wird. (Hier wird eine Plausibilitätsüberlegung erwartet, kein stringenter Beweis.)
Eine Veranschaulichung durch ein zusätzliches Diagramm ist positiv zu werten.

5. In $\mathbf{R}^-$ tritt diese Annäherung nicht auf. Dies liegt daran, dass die Summanden der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion mit ihren bei negativem x unterschiedlichen Vorzeichen unterschiedlich, aber systematisch auf die drei Funktionen verteilt werden. Auch hier ergibt die Summe der drei Funktionen wieder die Exponentialfunktion.

6. Siehe MathCAD-Blatt

7. Siehe MathCAD-Blatt

Bemerkungen

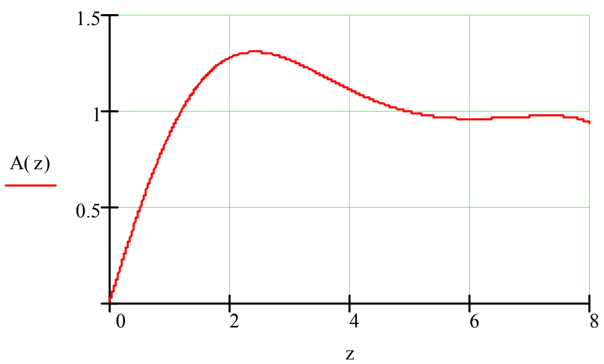
- Wesentlich für diese Aufgabe ist die Unterteilung in Teile, die unmittelbar mathematisches Denken und mathematische Kenntnisse erfordern, und solche, in denen aus der Verwendung eines CAA-Programms Einsichten und Lösungen erhalten werden.
- Insbesondere ermöglicht der Einsatz des Programms die Lösung numerischer Fragen, die sonst unzugänglich wären.
- Die Verwendung des CAA-Programms MathCAD entspringt hier der Vorliebe des Autors; selbstverständlich ließe sich die Aufgabe ebensogut in z.B. Derive oder Mathematica bearbeiten.
- Eine weitere, interessante Fragestellung wäre

  Welchen Flächeninhalt hat die Fläche zwischen den Graphen von *f* und *h* ab x = 0 ? Verwenden Sie auch hierfür die Hilfe des Rechners; kommentieren Sie aber das, was Ihnen der Rechner liefert, sehr deutlich.

  Lösung
  Die Fläche konvergiert für $x \to \infty$ gegen 1. Dies kann mit den verwendeten endlichen Reihen nicht gezeigt werden, da für größere x (hier ab etwa x = 8) der Einfluss der nicht berücksichtigten höheren Reihenglieder immer wichtiger wird.

Erweiterungsaufgabe- Maß der Fläche zwischen f und h im Positiven

$$A(z) := \int_0^z (f(x) - h(x))\,dx$$



Unterrichtsgang

Analysis und ihre *Vertiefung* werden hier in starkem Maße rechner- und anschauungsunterstützt betrieben. Dies ermöglicht, in starkem Maße zu visualisieren und das Verhalten auch von komplizierteren Funktionen praktisch interaktiv zu untersuchen; Ableitungen und Stammfunktionen komplizierter Funktionen konnten durch die Fähigkeiten des CAA-Programms, symbolisch zu arbeiten, gewonnen werden.
Das optisch-graphische Verfahren ermöglichte auch, die Frage der hinreichenden Bedingungen für Extremalstellen und Wendestellen klar darzustellen.

Von einem guten Umgang mit dem CAA-Programm werden für die Aufgabe ersichtlich folgende Fähigkeiten vorausgesetzt:

- Eigenes Arbeiten mit dem Programm
- Funktionen und ihre Darstellung
- Umgang mit Differential- und Integraloperatoren
- Verwendung der Gleichungs-Lösungs-Routinen (hier **wurzel**)

Zur *Vertiefung* der Analysis gehörten hier die Reihenentwicklungen. Insbesondere wurde im Unterricht angesprochen

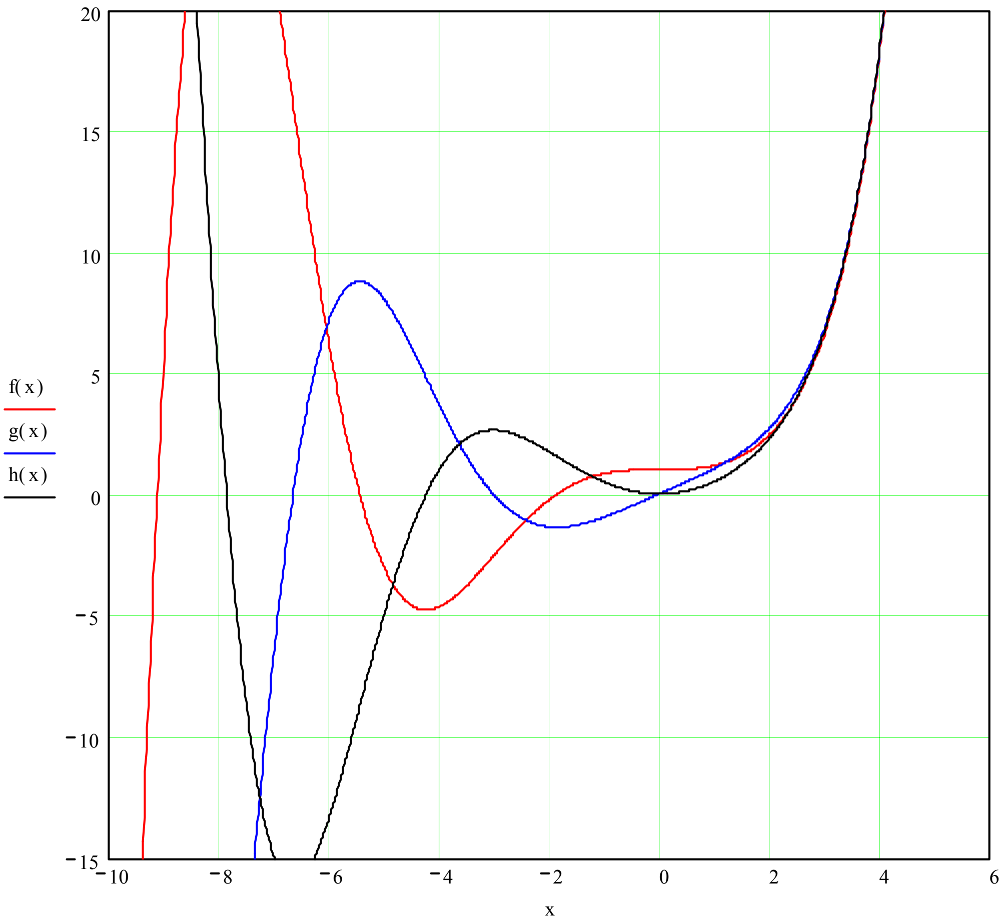
- die Reihe der Exponentialfunktion
- die Reihe der Funktion –exp(x) mit ihrer charakteristischen Eigenschaft, mit ihrer zweiten Ableitung identisch zu sein
- die Funktionen sinus und cosinus mit ihren Reihen im Hinblick auf ihre charakterisierende Eigenschaft, mit ihrer vierten Ableitung identisch und mit ihrer zweiten Ableitung „negativ identisch“ zu sein.

Abituraufgabe Ableitungszyklische Funktionen

$$f(x) := 1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{12}}{12!} + \frac{x^{15}}{15!} + \frac{x^{18}}{18!}$$

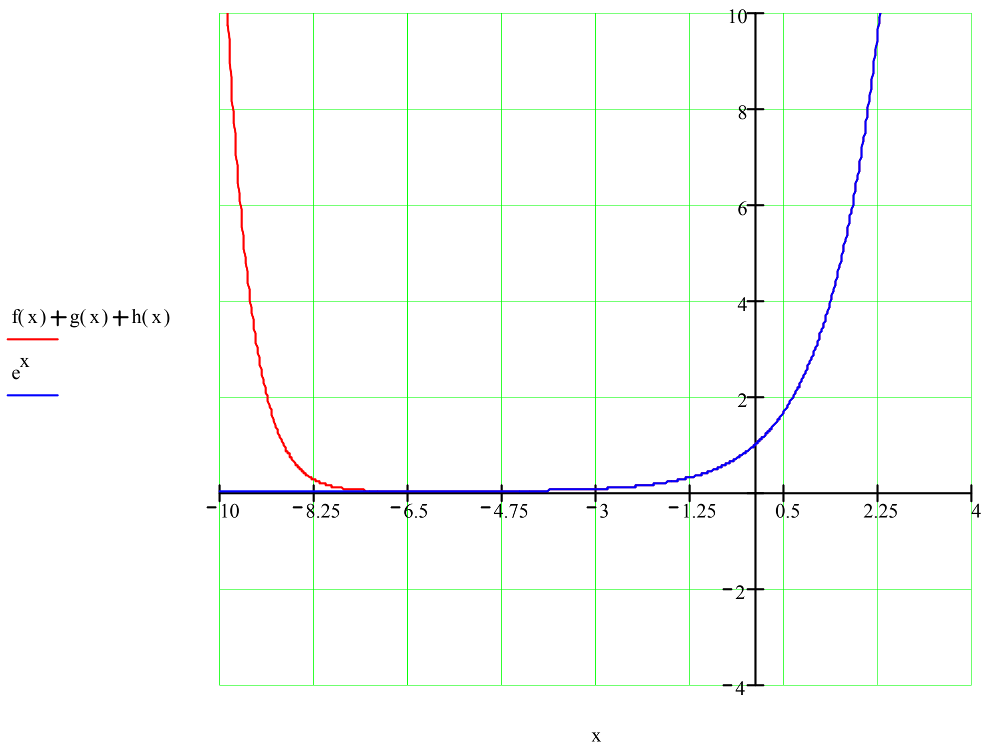
$$g(x) := x + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{13}}{13!} + \frac{x^{16}}{16!} + \frac{x^{19}}{19!}$$

$$h(x) := \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{14}}{14!} + \frac{x^{17}}{17!} + \frac{x^{20}}{20!}$$



Teilaufgabe 3

Darstellung der Summe der Funktionen und von exp(x)



Bestimmung der "linken" und "rechten" Schnittstellen von f und g

$xl := -3$ $\quad\quad$ $xr := 1$

$xfgl := wurzel(f(xl) - g(xl), xl)$ $\quad\quad$ $xfgr := wurzel(f(xr) - g(xr), xr)$

$xfgl = -2.418399$ $\quad\quad$ $xfgr = 1.2092$

$$\int_{xfgl}^{xfgr} (f(x) - g(x))\,dx = 3.897095$$

Fläche zwischen f und g - Teilaufgabe 6

Bestimmung der "linken" Schnittstelle zwischen h und g

$xl := -3$

$xhgl := wurzel(h(xl) - g(xl), xl)$

$xhgl = -3.627599$

$$\int_{xhgl}^{0} (h(x) - g(x))\,dx = 7.133707$$

Fläche zwischen h und g - Teilaufgabe 7

4. Beispiel – Grundkurs – Verbindung Analysis & Lineare Algebra / Geometrie

---

Zwei Funktionen

Gegeben sind die reellwertigen Funktionen $f: x \rightarrow f(x) = 4 - \frac{1}{2}x^2$ *und* $g: x \rightarrow g(x) = \frac{8}{x^2}$.

1.1 Zeichnen Sie die Graphen und geben Sie die wichtigsten Eigenschaften der Funktionen an. Eine vollständige Kurvendiskussion wird nicht erwartet.

1.2 Zeigen Sie, dass sich die Graphen in zwei Punkten berühren, und bestimmen Sie diese Berührpunkte. Diese beiden Punkte sollen die Namen A und C erhalten, wobei unter A derjenige der beiden Punkte verstanden werden soll, der einen negativen x-Wert aufweist.

2. Jetzt müssen Sie etwas umdenken: Nennen Sie die Achse, auf der die Funktionswerte aufgetragen sind, z-Achse, und erweitern Sie das bisherige x-z-Koordinatensystem zu einem vollständigen dreidimensionalen x-y-z-Koordinatensystem. Lassen Sie dann die Graphen von *f* und *g* um die z-Achse rotieren.
Die Punkte A und C werden jetzt auf einem Kreis liegen; der Kreis soll $\mathcal{K}$ heißen.

2.1 Machen Sie sich die Verhältnisse in einer hinreichend guten Skizze deutlich.

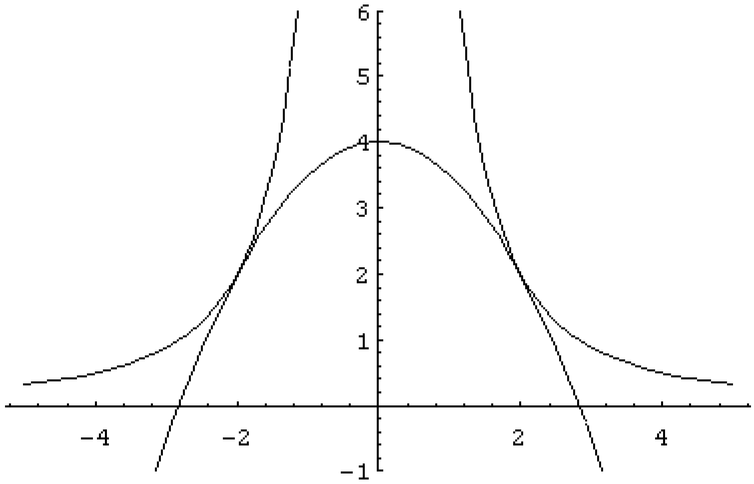
2.2 Geben Sie die Kreisgleichung für $\mathcal{K}$ an.

2.3 Vier weitere Punkte bekommen jetzt Namen: Unter B und D sollen die Punkte verstanden sein, die auf dem Kreis $\mathcal{K}$ und der y-z-Ebene liegen (sie haben also die x-Koordinate Null), wobei wieder B die negative y-Koordinate aufweist; O ist der Ursprung, und P ist der Spiegelpunkt zu O an der Ebene, die den Kreis $\mathcal{K}$ enthält.
Die Ebene *E* geht durch A, B und O; die Ebene *F* geht durch C und D.
Geben Sie die Gleichungen von *E* und *F* an.
Wie liegen die beiden Ebenen?
Bestimmen Sie den Abstand von *E* und *F*.

2.4 Ersichtlich bestimmen A, B, C, D, O und P eine Doppelpyramide $\mathcal{DPyr}$. Bestimmen Sie das Volumen und die Oberfläche dieser Doppelpyramide.

Lösungen:

1.1 (Niveau II) Die beiden Funktionen sind gerade, ihre Graphen sind also symmetrisch zur z-Achse.
(Niveau I) Als Parabel hat *f* ein Maximum bei Max = (0 | 4).
(Niveau II) Die Funktion *g* hat bei x = 0 einen geraden Pol und ist positiv definiert. Sie ist überall linksgekrümmt.
(Niveau II) Die Graphen bieten folgendes Bild:



1.2 (Niveau II) Gleichsetzen der Funktionsgleichungen ergibt eine biquadratische Gleichung mit den Lösungen $x_{S1} = -2$ und $x_{S2} = 2$.
Einsetzen in die Ableitungsterme von *f* und von *g* ergibt in beiden Fällen jeweils dieselbe Steigung der beiden Funktionen, nämlich $f'(x_{S1}) = g'(x_{S1}) = 1$ (wegen der Geradheit der Funktionen bei x_{S2} analog).
Die Punkte A = (-2 | 2) und B = (2 | 2) sind damit die gesuchten Berührpunkte.

2.2 (Niveau I) Die Kreisgleichung für $\mathcal{K}$ lautet
$\mathcal{K}: x^2 + y^2 = 4 \wedge z = 2$. Der Radius des Kreises ist r = 2 .
(Niveau I) Die Punkte haben der Reihe nach folgende Koordinaten:

A = (-2 | 0 | 2)	B = (0 | -2 | 2)	C = (2 | 0 | 2)
D = (0 | 2 | 2)	O = (0 | 0 | 0)	P = (0 | 0 | 4)

(Niveau II) Die Ebene *E* ist eine Nullpunktsebene und beschrieben durch

$$E = \left\{\vec{x} \,|\, \vec{x} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}, \lambda, \mu \in R\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | x + y + z = 0\right\} \;;$$

die Ebene *F* hat dann die Darstellungen

$$F = \left\{\vec{x} \,|\, \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda\overrightarrow{PC} + \mu\overrightarrow{PD}, \lambda, \mu \in R\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | x + y + z = 4\right\} .$$

Da *E* und *F* den selben Normalenvektor aufweisen (die Koeffizienten in den Restriktionen sind sogar gleich), nämlich $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, sind die Ebenen parallel.

(Niveau III) Da E die zu F gehörige Nullpunktsebene ist, ist der Abstand der Ebenen gleich dem Abstand des Punktes P vom Nullpunkt. Unter Verwendung der Restriktionen und der Abstandsformel für Ebenen ergibt sich sofort $dis(E,F)=\frac{4}{\sqrt{3}}$.

(Längere Rechnung: Niveau II)

2.3 (Niveau I) Mit den Werten aus 2.2 sind alle Kanten zwischen je zwei benachbarten Punkten auf dem Kreis gleichlang mit der Streckenlänge $d=\sqrt{8}$. Auch die Länge der Strecken von O bzw. P zu den Punkten auf dem Kreis ist jeweils d.

2.4 (Niveau III) Die Doppelpyramide ist auf Grund ihrer Konstruktion eine regelmäßige quadratische Pyramide - genauer gesagt, ein platonischer Oktaeder. Das Volumen bestimmt sich zu $V=\frac{32}{3}$.

(Niveau III) Die Oberfläche besteht damit aus acht kongruenten gleichseitigen Dreiecken mit der Kantenlänge d. Die Oberfläche ergibt sich damit zu $A=2\sqrt{3}\,d^2=16\sqrt{3}$.

(Auch hier wieder: Längere Rechnung - Niveau II)

Unterrichtsgang

Über die Standards in Analysis und Linearer Algebra hinausgehend setzt der Unterrichtsgang, der zu dieser Aufgabe führt, weitere Schwerpunkte:

- ständige Betonung der (optischen) Bedeutung der Ergebnisse analytischer Untersuchungen von Funktionen
- guter Umgang mit geometrisch-anschaulicher Vorstellung
- guter Umgang mit den verschiedenen Darstellungsformen der Objekte der Linearen Algebra
- Rückgriff auf die ebene und die räumliche Geometrie der Mittelstufe mit ihren Objekten und Resultaten.

Bemerkungen

- Diese Aufgabe basiert im Teil 1 auf einer Grundkurs-Aufgabe des Abiturjahrgangs 2000.

- Ein Leistungskurs könnte grundsätzlich über weite Teile einen analogen Unterrichtsgang aufweisen. Zusätzlich könnten hier noch als verbindende und vertiefende Inhalte dazukommen:
  - Kegelschnitte außer Kreis
  - Kugeln; Zylinder; Ellipsoide
  - Volumenintegrale

  Aus einem solchen Leistungskurs entstanden, könnte die Aufgabe beispielsweise so aussehen:

4. Beispiel – Variante Leistungskurs:

Zwei Funktionen

Gegeben sind die reellwertigen Funktionen $f: x \to f(x) = 4 - \frac{1}{2}x^2$ *und* $g: x \to g(x) = \frac{8}{x^2}$.

1.1 Machen Sie sich mit den Funktionen hinreichend gut vertraut - dazu gehört auch eine sinnvoll gute Zeichnung.

1.2 Zeigen Sie, dass sich die Graphen in zwei Punkten berühren, und bestimmen Sie diese Berührpunkte. Diese beiden Punkte sollen die Namen A und C erhalten, wobei unter A derjenige der beiden Punkte verstanden werden soll, der einen negativen x-Wert aufweist.

2 Jetzt müssen Sie etwas umdenken: Nennen Sie die Achse, auf der die Funktionswerte aufgetragen sind, z-Achse, und erweitern Sie das bisherige x-z-Koordinatensystem zu einem vollständigen dreidimensionalen x-y-z-Koordinatensystem. Lassen Sie dann die Graphen von *f* und *g* um die z-Achse rotieren.
Die Punkte A und C werden jetzt auf einem Kreis liegen; der Kreis soll $\mathcal{K}$ heißen.

2.1 Geben Sie die Kreisgleichung für $\mathcal{K}$ an.

2.2 Vier weitere Punkte bekommen jetzt Namen: Unter B und D sollen die Punkte verstanden sein, die auf dem Kreis $\mathcal{K}$ und der y-z-Ebene liegen (sie haben also die x-Koordinate Null), wobei wieder B die negative y-Koordinate aufweist; O ist der Ursprung, und P ist der Spiegelpunkt zu O an der Ebene, die den Kreis $\mathcal{K}$ enthält.
Die Ebene *E* geht durch A, B und O; die Ebene *F* geht durch C und D und ist zu *E* parallel.
Geben Sie die Gleichungen von *E* und *F* an und bestimmen Sie den Abstand von *E* und *F*.

2.3 Ersichtlich bestimmen A, B, C, D, O und P eine Doppelpyramide. Bestimmen Sie die Oberfläche dieser Doppelpyramide.

3. Verschiebt man den Kreis $\mathcal{K}$ beliebig längs der z-Achse, so erhält man einen Zylinder $\mathcal{Zyl}$.
Was für ein geometrisches Gebilde ist der Schnitt von *E* und $\mathcal{Zyl}$? Bestimmen Sie die Gleichung dieses Schnittes in (Koordinaten) der Ebene *E*!

4. Gehen wir zurück in die x-z-Ebene.

4.1 Betrachten Sie jetzt den Rotationskörper, der entsteht, wenn man den Graphen von *g* um die x-Achse rotieren lässt. Zeigen Sie, dass das Volumen dieses Körpers für x ≥ 4 den Wert $V = \frac{1}{3}\pi$ annimmt.

4.2 An welchem x-Wert x_k muss dieser Körper durchschnitten werden, damit die entstehenden Körper jeweils die Hälfte des ursprünglichen Volumens aufweisen?

Lösung der neuen Aufgabenteile

3. (Niveau II) Der Schnitt eines Kreiszylinders mit einer Ebene, dessen Normalenrichtung nicht die Achsenrichtung des Zylinders ist, bildet eine Ellipse.
(Niveau III) Wesentlich für die Kenntnis der Ellipse ist die Kenntnis der Länge der Hauptachsen. Hierzu kann einfach überlegt werden:
Der Zylinderdurchmesser ist der kleine Durchmesser der Ellipse, also b = 2.

Auf Grund der Symmetrie der Doppelpyramide liegen die Hauptpunkte auf der Geraden mit dem Richtungsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, und da für die Hauptpunkte $x^2 + y^2 = 4$ gilt, ergibt sich die große Halbachse zu $a = 2\sqrt{3}$.
Berücksichtigt man noch die Verschiebung, so erhält man in einem Koordinatensystem in *E*, das mit dem ursprünglichen den Ursprung gemeinsam und seine x-Richtung in Richtung der großen Halbachse hat, die Ellipsengleichung

$$Ell: \frac{(x - 2\sqrt{3})^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1 \ .$$

(Anmerkung: Auch Lösungen, die lediglich die richtigen Werte für die Hauptachsen aufweisen, sind anzuerkennen. Ebenso ist der angegebene nicht der einzig mögliche Weg.)

4.1 (Niveau II) Mit der bekannten Formel für das Volumenintegral und dem ebenfalls bekannten Formalismus für uneigentliche bestimmte Integrale ergibt sich

$$V = \pi \int_4^\infty g^2(x)dx = 64\pi \int_4^\infty \frac{dx}{x^4} = 64\pi \cdot \left[\frac{1}{-3x^3} \right]_4^\infty = \frac{\pi}{3}$$, wie gefordert.

4.2 (Niveau II) Für diesen Aufgabenteil ist folgende Gleichung zu lösen:

$$64\pi \cdot \left[\frac{1}{-3x^3} \right]_{xk}^\infty = \frac{\pi}{6}, \text{ damit } xk = \sqrt[3]{128} \ .$$

- Andere Aufgabenteile, die gegebene Teile ergänzen oder ersetzen könnten (hier ohne Lösung vorgestellt):

  2.4 Bestimmen Sie das Volumen des Restkörpers zwischen dem Kreiskegel mit $\mathcal{K}$ als Basis und O als Spitze und der regelmäßigen quadratischen Pyramide ABCDO !

  2.5 Unter welchem Winkel schneidet $\overline{PO}$ die Senkrechte auf *E* durch O ?

  3.2 Geben Sie die Gleichung dieses Schnittes sinnvoll in der Ebene *E* an!

  3.3 Die Ebene *G* geht durch A,C und den Punkt Q = (0 | y_D | 0). Was für ein geometrisches Gebilde ist der Schnitt von *G* und $\mathcal{Zyl}$? Bestimmen Sie die Gleichung dieses Schnittes!

  3.4 Welches Volumen weist der Körper auf, der durch die x-y-Ebene, den Zylinder $\mathcal{Zyl}$ und den rotierten Graphen von *f* begrenzt wird?

5. Beispiel – Grundkurs – Verbindung Lineare Algebra & Analysis

No Brain – No Pain

Die Vertriebsfirma No Brain - No Pain verkauft vier Produkte, nämlich Agonizer, Bogeys, Crookies und Ditscheridoos.

1. An einem Tag wurden vier Rechnungen ausgeschrieben**:**

- **Elena H. hatte sechs Agonizer, sechs Ditscheridoos und je einen Bogey und einen Crookie gekauft - ihre Rechnung beläuft sich auf 200 Euro.**
- **Jessica C. hatte je drei Bogeys und Crookies sowie vier Ditscheridoos und fünf Agonizer erworben und muss dafür 197 Euro zahlen.**
- **Miriam K. erwarb einen Agonizer, drei Crookies, vier Ditscheridoos und sogar elf Bogeys - sie ist mit 201 Euro dabei.**
- **Vanessa G. schließlich muss für den Erwerb von sieben Ditscheridoos sowie je drei Exemplaren der anderen Produkte 202 Euro bezahlen.**

1.1 Beschreiben Sie - ohne zu rechnen - möglichst genau den Raum möglicher Lösungen.

1.2 Was kosten die vier Produkte jeweils?

1.3 Leider unterlief bei der Rechnung für Miriam K. ein Fehler. Es sind dort 11 Agonizer ausgewiesen. Welche Preise für die vier Produkte könnten die vier Frauen aus den Angaben jetzt errechnen? Wie ist dieses Ergebnis zu interpretieren?

1.4 Was wäre denn herauszufinden, wenn es die Rechnung von Miriam K. gar nicht geben würde?

2. Denken wir die Sache einmal geometrisch. Streichen wir zunächst einmal die Ditscheridoos aus dem Angebot der Firma; die Preise werden neu definiert.

Nun gab es drei Rechnungen, jeweils über 99 Euro:

- **Carsten S. hatte einen Agonizer, sechs Bogeys und zwei Crookies bestellt.**
- **Sven T. brauchte zwei Agonizer, drei Bogeys und vier Crookies.**
- **Nico U. benötigte aus unbekannten Gründen keine Crookies, dafür aber elf Agonizer und zwei Bogeys.**

2.1 Was kosten denn die Geräte jetzt?

2.2 Was stellt denn jede Rechnung, geometrisch interpretiert, dar?

2.3 Wo schneidet denn die Sven T.-Ebene jeweils die Koordinatenachsen?

3. Interpretieren Sie die Rechnung von Sven T. jetzt als Funktion z*(x,y)*.

3.1 Was ist der Gradient einer skalaren Funktion mehrerer Variablen? Wie berechnet man ihn? Wie ist er – im Falle einer Funktion zweier Variablen – geometrisch zu interpretieren?

3.2 Bestimmen Sie den Gradienten der Funktion *z(x,y)*!

3.3 Nun muss ja nicht jede Funktion von zwei Variablen linear sein. Nehmen wir als Beispiel die Funktion $g: x \to x \cdot \sqrt{y+1} + y \cdot \sqrt{x+4}$. Geben Sie den Gradienten von *g* an und bestimmen Sie seinen Wert des an der Stelle x = 3 ; y = 4 .

Lösungen

1.1 (Niveau I) Da die Preise alle positiv sein müssen, ist der Raum möglicher Lösungen ein (vierdimensionaler) Quader mit der Kantenlänge von etwa 200 €, der im Ursprung beginnt. ((Niveau II) Genauer gesagt, ist es nicht dieser gesamte Quader, denn die Summe der Koordinaten jedes Punktes muss ja kleiner sein als 200 €; (Niveau III) der Raum möglicher Lösungen ist also der positive Teil der 200 € - Umgebung um den Ursprung bezüglich der Summenmetrik.)

1.2 (Niveau I) Mit Hilfe von Standardverfahren (z.B. Gauß-Jordan) zur Lösung dieses (4x4)-LGS ergibt sich:

Ein Agonizer kostet 17 €, ein Bogey 9 €, ein Crookie 11 € und ein Ditscheridoo 13 €.

1.3 (Niveau II) Dieses Gleichungssystem, genau so gelöst, gibt für A und D dieselbe Lösung. Die Lösung für B ist aber –12.25, und diese Zahl liegt – siehe 1.1 – außerhalb des Raumes möglicher Lösungen. Hiermit ist ein Fehler in der Rechnungsgestellung klar.

1.4 (Niveau II) Das Gleichungssystem ist nunmehr unterbestimmt; weiterhin ergeben sich die bekannten Preise für A und D, aber über B und C ist nur noch herauszufinden, dass ein Bogey und ein Crookie zusammen 20 € kosten.

Bemerkung: „Normales“ Vorgehen allein macht es möglich, nicht dreimal das – nur leicht geänderte – Gleichungssystem durchrechnen zu müssen, sondern sozusagen nur die Änderungen „nachzurechnen“.

2.1 (Niveau II) Wieder die Lösung eines LGS, hier eines (3 x 3)-LGS:

Ein Agonizer kostet 7 €, ein Bogey 11 € und ein Crookie 13 € .

2.2 (Niveau I) Jede Rechnung lässt sich als Restriktion im R³ auffassen, also ist jede Rechnung die Parameterdarstellung einer Ebene.

2.3 (Niveau II) Sei S die Sven T.-Ebene, dann hat sie die Hesse-Form

$$S: \frac{A}{99/2} + \frac{B}{99/3} + \frac{C}{99/4} = 1$$

Damit sind die drei Achsenschnittstellen $A_S = \frac{99}{2} Euro, B_S = 33\, Euro, C_S = \frac{99}{4} Euro$ **.**

3. (Niveau II) Umgeschrieben als Funktion ist die Sven T-Ebene gegeben durch
$z(x,y) = \frac{99}{4} - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y$ **.**

3.1 (Niveau I) Der Gradient einer skalaren Funktion ist ein Vektor, der in die Richtung der stärksten Änderung der Funktion zeigt und dessen Betrag eben diese Änderung angibt.

Es gilt: $\overrightarrow{grad} f = \begin{pmatrix} \partial / \partial x \\ \partial / \partial y \\ \partial / \partial z \end{pmatrix} \cdot f$ **(analog im n-dimensionalen Fall)**

Im Fall einer zweidimensionalen Funktion ist die Richtung des Gradienten die Richtung, in der die Tangentialebene am stärksten steigt.

3.2 (Niveau II) Einsetzen und partiell Ableiten ergibt $\overrightarrow{grad}\, z(x,y) = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.75 \end{pmatrix}$ **. Der Gradient von** z **ist also – was bei einer Ebene nicht verwundert – ein konstanter Vektor. Interpretiert sagt das Resultat: Die Ebene S steigt in der Richtung** $\begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.75 \end{pmatrix}$ **über der x-y-Ebene maximal, und die Steigung in dieser Richtung ist** $\frac{\sqrt{13}}{4}$**.**

3.3 (Niveau III) Anwendung der Definition des Gradienten und der Ableitungsregeln liefert $\overrightarrow{grad}\, g(x,y) = \begin{pmatrix} \sqrt{y+1} + \dfrac{y}{2\sqrt{x+4}} \\ \dfrac{x}{2\sqrt{y+1}} + \sqrt{x+4} \end{pmatrix}$ **und damit**

$$\overrightarrow{grad}\, g(3,4) = \begin{pmatrix} \sqrt{5} + \dfrac{2}{\sqrt{7}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} + \sqrt{7} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2.9920 \\ 3.5402 \end{pmatrix}.$$

Bemerkungen

Der Unterricht, dem diese Aufgabe entspringt, legt vornehmlich Wert auf die Anwendbarkeit der Linearen Algebra und auf die Frage nach der Beschreibung von Flächen im R^3**.**

Dafür nimmt er den Themenkomplex Vektorraum – Erzeugung – Basis nicht in den Focus.

Unterrichtsgang

Durchgehende methodische Vorgehensweisen:

- **Ausnutzung graphischer Darstellungen, auch unter Zuhilfenahme von rechnergestützten Darstellungen im Unterricht**
- **Verwendung von Problemstellungen, die auf LGS bzw. auf linear-geometrische Gebilde führen**
- **Betonung des Restriktionscharakters von Gleichungen, sowohl von linearen wie von nicht-linearen**

Folge der inhaltlichen Hauptpunkte:

- **Lösungstheorie von LGS**
- **Darstellung der Parallelität zwischen (linearen) Gleichungen und Strukturen im** R^n**, insbesondere zwischen einer linearen Gleichung und Ebenen im** R^3
- **Vertrauter Umgang und vertraute Umrechnung der verschiedenen Formen: Punkt-Richtungs-Form, Parameterform, Hesse-Form**

- **Ausnutzung der Hesse-Form: Normalen-Vektor, Abschnitte, Volumina von einfacheren Tetraedern; Abstände**

- **Euklidischer Abstand**

- **Lösungsbereiche: Lösungsquader, insbesondere bei Problemen, in denen alle Elemente der Lösung auf Grund der Aufgabenstellung positiv definit sein müssen; Überlegungen zum Abstandsbegriff (Idee des Summen- und des Maximum-Abstands)**

- **Ableitungen von mehrdimensionalen Funktionen: Problemstellung – Wie kann eine Steigung einer nicht ebenen Fläche im R^3 gefasst werden? Einführung des Gradienten; Gradient als Vektor (-Funktion); Gradient im physikalischen Kontext**

- **Visualisierung des Gradienten bei Funktionen zweier Variablen**

- **Verbindung zwischen Steigung einer Ebene im R^3 und Gradient**

6. Beispiel – Grundkurs – Verbindung Lineare Algebra & Analysis

Kegelschnitte

Gegeben sind

die Ellipse `Ell` mit $Ell: \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ und

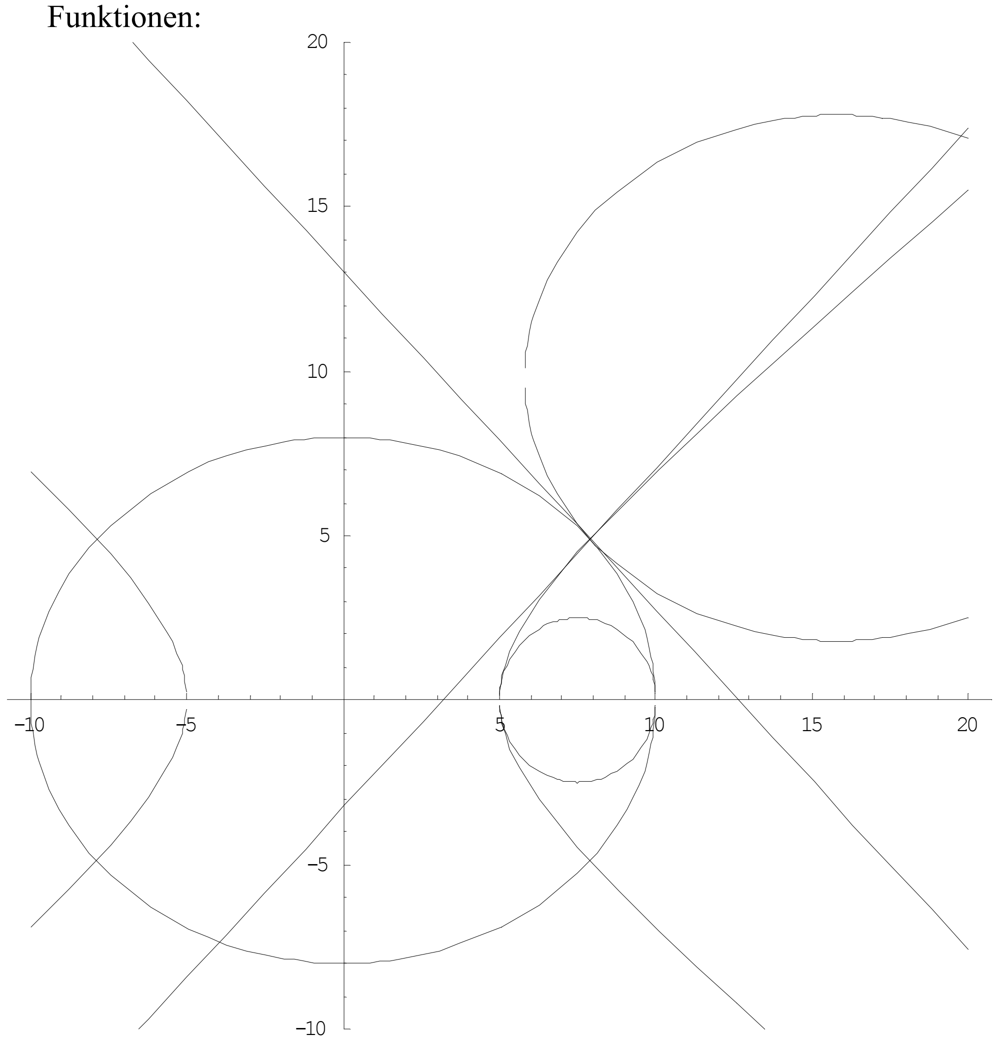
die Hyperbel `Hyp` mit $Hyp: \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$.

1. Geben Sie für beide Kurven jeweils die Lage der beiden Brennpunkte sowie der Hauptpunkte an und skizzieren Sie den Verlauf von `Ell` und `Hyp` hinreichend gut, um an Hand der Skizze Ihre weiteren Resultate prüfen zu können.
2. Bestimmen Sie die Schnittpunkte $S_1 - S_4$ von `Ell` und `Hyp`.
3. Wie groß ist in einem Schnittpunkt die Summe der Abstände von diesem Punkt zu den beiden Brennpunkten der Ellipse? Wie groß die Differenz der Abstände von diesem Punkt zu den beiden Brennpunkten der Hyperbel?
4. Der Kreis `K` hat seinen Mittelpunkt M_K auf der x-Achse und berührt `Ell` und `Hyp` jeweils an den rechten Hauptpunkten. Geben Sie die Kreisgleichung für `K` an!
5. Wenn der Kreis `K` um die y-Achse rotiert, so bildet er einen Torus. Welches Volumen hat dieser Torus?
6. Im rechten oberen Schnittpunkt S_1 gibt es eine Tangente t_E an `Ell` und eine Tangente t_H an `Hyp`. Geben Sie die Gleichungen zu diesen beiden Geraden an und berechnen Sie dann den Winkel zwischen t_E und t_H. (Hinweis: Bei dieser Teilaufgabe können analytische Methoden oder Methoden aus der Linearen Algebra helfen.)
7. Die Ellipse `Ellv` hat dieselben Halbachsen wie `Ell`, die Halbachsen liegen auch parallel zu den entsprechenden Halbachsen von `Ell`. Allerdings ist `Ellv` so verschoben, dass `Ellv` und `Ell` sich in S_1 berühren. Welche Gleichung hat `Ellv` ? (Es kommt hierbei weniger auf die genauen Zahlen für die Koordinaten von S_1 an als darauf, dass Sie mit diesen Koordinaten arbeiten können.)
8. Die Hyperbel rotiert jetzt um die x-Achse und bildet so ein (zweischaliges) Rotationshyperboloid. Welchen Rauminhalt hat die rechte Schale bis x = 10 ?

Lösungen

1. (Niveau I) Mit den bekannten Gleichungen für die Brennpunktabstände ergeben sich für `Ell`: $F_l = (-6 \mid 0)$ und $F_r = (6 \mid 0)$; $H_l = (-10 \mid 0)$ und $H_r = (10 \mid 0)$
   für `Hyp`: $F_l = (-\sqrt{41} \mid 0)$, $F_r = (\sqrt{41} \mid 0)$; $H_l = (-5 \mid 0)$ und $H_r = (5 \mid 0)$

   Die graphische Darstellung enthält auch die anderen angesprochenen Kegelschnitte und Funktionen:



2. (Niveau II) Gleichsetzen der Bestimmungsgleichungen ergibt
   $S_1 = (5\sqrt{2.5} \mid \sqrt{24})$; $S_2 = (-5\sqrt{2.5} \mid \sqrt{24})$; $S_3 = (-5\sqrt{2.5} \mid -\sqrt{24})$; $S_4 = (5\sqrt{2.5} \mid -\sqrt{24})$

3. (Niveau I) Gemäß der Definitionen von Ellipse und Hyperbel ergeben sich die geforderten Zahlen zu 20 und 10.

4. (Niveau II) `K` hat seinen Mittelpunkt auf der x-Achse mittig zwischen den rechten Hauptpunkten und einen Durchmesser von d = 5. Also
   `K` : $\left(\begin{pmatrix} x - 7.5 \\ y \end{pmatrix}^2\right) = 6.25$ oder `K` : $(x - 7.5)^2 + y^2 = 6.25$.

5. (Niveau II) Mit der bekannten Formel für das Torusvolumen $V_{Torus} = 2\pi^2 r^2 R$ und mit den Erkenntnissen, dass r der Radius von `K` ist und R der Ursprungsabstand des Mittelpunktes von `K`, ergibt sich
   $V_{Torus} = 925.27541$.

6. (Niveau II) Lösung mit Hilfe der bekannten Tangentengleichungen $\frac{x \cdot x_s}{a^2} \pm \frac{y \cdot y_s}{b^2} = 1$ oder (Niveau III) über die ersten Ableitungen der Ellipsen- und Hyperbelfunktionen (ergibt die Steigungen in S_1) und dann entweder in eine Geradengleichung oder eine Punkt-Richtungsform einer vektoriellen Geradengleichung eingesetzt – ergibt:
   $t_E(x) = -1.0328x + \sqrt{24} + 1.0328 \cdot 5\sqrt{2.5}$ *und*
   $t_H(x) = 1.0328x + \sqrt{24} - 1.0328 \cdot 5\sqrt{2.5}$
   Die beiden Tangenten haben also denselben Betrag der Steigung.
   (Niveau III) Deswegen ist der Winkel zwischen ihnen leicht zu bestimmen –
   $\alpha = 180° - 2 \cdot \arctan(1.0328) = 88.151°$
   (Auch eine Lösung über den Cosinussatz aus den Richtungsvektoren der beiden Geraden ist sinnvoll.)
7. (Niveau II) Anwendung der Verschiebungsformeln ergibt
   `Ellv`: $\frac{(x-2x_s)^2}{100} + \frac{(y-2y_s)^2}{64} = 1$,
   denn die ursprüngliche Ellipse wird an S_1 punktgespiegelt.
8. (Niveau III, da in diesem Zusammenhang noch nicht angewendet) Anwendung der Formel für das Volumenintegral unter Verwendung der Hyperbelgleichung (deren Quadrat besonders leicht zu erhalten ist) und der gegebenen Grenzen von 5 und 10 ergibt
   $V = \pi \int_5^{10} hyp^2(x)dx = \pi \int_5^{10} (\frac{x^2}{25} - 1)dx = 335.1032164$.

Bemerkungen

- Auf die Teilaufgabe 5. kann verzichtet werden; allerdings erfordert diese Teilaufgabe lediglich die Anwendung einer erarbeiteten Formel.

- Weitere mögliche Aufgabenteile, die andere Aufgabenteile ersetzen und die Aufgabe dann auch zu einer Leistungskurs-Aufgabe machen können:

9. (als Alternative zu 6.) Im rechten oberen Schnittpunkt S_1 gibt es eine Tangente t_E an `Ell` und eine Tangente t_H an `Hyp`. N_E und N_H seien die Schnittpunkte der Tangenten mit der x-Achse. Zeigen Sie, dass das Dreieck $\Delta N_H N_E S_1$ gleichschenklig ist.
   (Hinweis: Bei dieser Teilaufgabe können analytische Methoden oder Methoden aus der Linearen Algebra helfen.)
10. (als Alternative zu 6. und 7.) Im rechten oberen Schnittpunkt S_1 gibt es eine Tangente t_E an `Ell` und eine Tangente t_H an `Hyp`. Der Kreis `C` berührt beide Tangenten. Sein Mittelpunkt liegt oberhalb von S_1. Weiterhin ist er flächengleich mit der Ellipse `Ell`. Geben Sie die Kreisgleichung für `C` an !

    Lösung:

    i) Da $F_C = \pi r^2$ und $F_{Ell} = \pi a b$, muss $r = \sqrt{ab}$ gelten.

    ii) Der Betrag der Steigungen der beiden Tangenten ist gleich (siehe oben), also muss $x_M = x_S$ gelten.

iii) Wenn P der Berührpunkt des Kreises C an t_E ist, so steht PM senkrecht auf t_E. Bezeichnen wir den Steigungswinkel von t_E mit α_E, so ergibt sich y_M z.B. durch Anwendung elementarer Trigonometrie zu $y_M = ys + \frac{r}{\cos\alpha_E} \approx$ 17.7571805 und damit C: $\left(\begin{pmatrix} x - xs \\ y - ys \end{pmatrix}\right)^2 = 80$.

11. Bestimmen Sie das Flächenmaß der Fläche zwischen `Ell` und `Hyp` !

Lösung:

$$F = 4\left(\int_5^{xs} hyp(x)dx + \int_{xs}^{10} ell(x)dx\right) = 64.1805444$$

12. Wenn beide Kurven um die y-Achse rotieren, so bilden die Flächen zwischen `Ell` und `Hyp` eine Art Ring mit Graten. Welches Volumen weist dieser auf ?

Lösung:

Anwendung der Idee, die zur Volumenformel des Torus geführt hat, liefert

$$V = 2\pi\left(\int_0^{ys} 100\left(1 - \frac{y^2}{64}\right)dy - \int_0^{ys} 25\left(\frac{y^2}{26} - 1\right)dy\right) = 3078.12$$

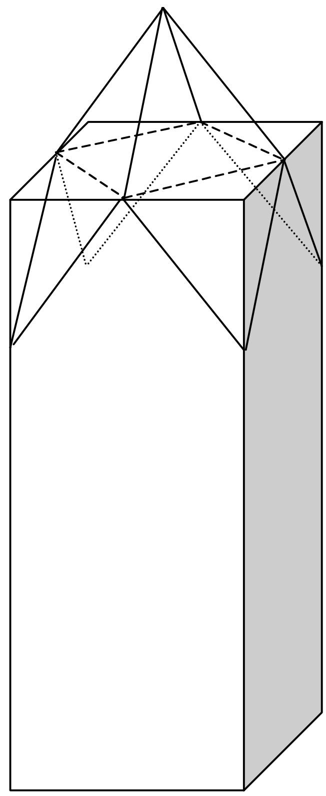
Unterrichtsgang

Die Aufgabe entstammt dem 3. Semester, in dem die Gebiete Lineare Algebra und Analysis über die Kegelschnitte verbunden wurden. Der Unterrichtsgang hatte folgende Schwerpunkte:

- Kreis als geometrisches Gebilde; Kreis unter der Sicht der Vektor-Algebra
- Kugel als geometrisches Gebilde; Kugel unter der Sicht der Vektor-Algebra
- Analytische (funktionale) Darstellung des Kreises; Verschiebungen; Steigung der Kreisfunktion; Volumina von Kugeln, Tori etc (Wiederholung der Volumenintegrale).
- Tangenten, Sekanten; Tangentialebenen, Schnittebenen
- Reguläre Kegelschnitte allgemein
- Ellipse: Definition, analytische Darstellung, Konstruktion, Verwandtschaft zum Kreis; Tangenten
- Hyperbel: Definition, analytische Darstellung, Konstruktion, Verwandtschaft zur Ellipse; Tangenten
- Kegelschnitte in Polardarstellung, Bedeutung von Bahnparameter und Exzentrizität; $r(\varphi)$ – Funktion von Kreis und Ellipse; Parametrisierung dieser Funktion (Ausblick auf Planetenbewegungen)

7. Beispiel – Grundkurs – Verbindung Lineare Algebra & Analysis

Vier Türme



Der Fürst Architektos eroberte mit seinen drei Söhnen eine Stadt, an deren vier Ecken vier gleiche Türme standen. Es waren vier senkrechte quadratische Säulen mit der Grundseite 8 m und der Höhe 40 m.

Zum Zeichen des Sieges sollten die Türme verändert werden. Und zwar sollte jeder der Söhne einen Turm umgestalten. Diese Türme sollten allerdings einander ähnlich bleiben: Jeweils von den Verbindungsstrecken benachbarter Seitenmitten ausgehend sollten vier gleichgroße Ecken abgeschnitten und so auf das verbliebene Dachquadrat aufgesetzt werden, dass das neue Turmdach aus vier an der Spitze zusammenlaufenden Rhomben besteht.

Der älteste Sohn sollte so umbauen, dass die Gesamtaußenfläche des Turmes gleich blieb.

Der mittlere Sohn sollte so umbauen, dass die Gesamtaußenfläche des Turms möglichst klein wird.

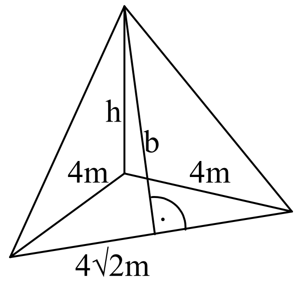
Der jüngste Sohn sollte so umbauen, dass benachbarte Seitenflächen den gleichen Winkel miteinander einschließen wie die Seitenmauern mit den Dachflächen.

Geben Sie für alle drei umgebauten Türme die Gesamthöhe an – und auch den Wert der den jeweiligen Turm bestimmenden Größe.

Lösungen

Da insgesamt jeweils nach der Höhe gefragt ist, scheint es sinnvoll, bei jeder der Teilaufgaben als zu bestimmende Größe eine Höhengröße zu wählen, am sinnvollsten, dazu die Höhendifferenz gegenüber der Ausgangshöhe zu nehmen.

Diese Höhendifferenz sei des Weiteren mit *h* bezeichnet; die weiteren Bezeichnungen und sofort ersichtlichen Werte können der Skizze entnommen werden; des Weiteren mögen alle Längenwerte von nun an in Meter gerechnet sein.



Ältester Sohn

(Niveau I) Die Gesamtfläche des übernommenen Turms ist $F_{alt} = 4\cdot 40\cdot 8 + 8\cdot 8 = 1344$. Diese Flächengröße soll erhalten bleiben.

Die Fläche der vier Rauten zusammen ergibt sich aus

$$F_R(h) = 4\cdot 2\cdot 0.5\cdot 4\sqrt{2}\cdot b\ ;$$

die Flächenhöhe *b* bestimmt sich mit Hilfe des Satzes des Pythagoras zu

$$b = \sqrt{8 + h^2}\,.$$

Damit ist $F_R(h) = 16\cdot\sqrt{16 + 2h^2}$

Die Seitenflächen vermindern sich gegenüber dem ursprünglichen Zustand um einen Streifen der Breite *h/2*; ihre Fläche ist damit

$$F_S(h) = 4\cdot 8\cdot(40 - h/2) = 1280 - 16h\ .$$

Damit ergibt sich für die gesamte Fläche in Abhängigkeit von *h*:

(1) $$F(h) = 1280 - 16h + 16\sqrt{16 + 2h^2}$$

(Niveau II) Gleichsetzen der alten Fläche mit *F(h)* liefert eine quadratische Gleichung mit den beiden Lösungen $h_1 = 0$m (was nicht verwundert) und $h_2 = 8$m.
Der Turm des ältesten Sohnes wird also um acht Meter erhöht.

Mittlerer Sohn

(Niveau I) Für diesen Teil wird die Formel (1) weiter verwendet. Da die Fläche minimal sein soll, muss die erste Ableitung der *F(h)*-Funktion auf Nullstellen untersucht werden; eine fallende Durchgangsnullstelle in *F'(h)* ist ein Minimum der Flächenfunktion.

(2) $$F'(h) = \frac{16}{\sqrt{16 + 2h^2}}(2h - \sqrt{16 + 2h^2})$$ (Niveau II)

Die notwendige Extremalbedingung $F'(h_E) = 0$ liefert

$$16 + 2h_E^2 = 4h_E^2$$ und damit – nur der positive Wert von h_E macht hier Sinn –

(3) $$h_E = 2\sqrt{2}\,.$$

Durch Einsetzen von z.B. $h = 2$ und $h = 3$ in (2) überzeugt man sich, dass $F'(h)$ bei h_E eine fallende Durchgangsnullstelle aufweist. (Eine solche kurze Prüfung ist Niveau III; eine längere, formalere Überprüfung wäre Niveau II.)

Der Turm des mittleren Sohnes wird also um $2\sqrt{2}$ m erhöht, die minimale Fläche beträgt 1325.25 m².

Jüngster Sohn

(Niveau II) Da es hier um Winkelbestimmung zwischen ebenen Flächen geht, werden die Methoden der Linearen Algebra verwendet.
Aus Symmetriegründen müssen nur drei ebene Flächen betrachtet werden – zwei Rautenflächen und eine Seitenfläche.
Legen wir das Koordinatensystem so, dass der Ursprung in der Spitze des Turms liegt und die Turmseiten parallel zur x-z-Ebene bzw. zur y-z-Ebene liegen.
Dann kann man die Richtungsvektoren für die Rautenebenen bequem in Richtung der Dachkanten legen; die Seitenflächenebene ist ohnehin einfach zu bestimmen.
(Niveau II) Es ergibt sich in Punkt-Richtungsform

(4)
$$Rau_1 = \left\{ \vec{x} \mid \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -h \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -h \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in R \right\}; Rau_2 = \left\{ \vec{x} \mid \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -h \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -h \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in R \right\};$$
$$Sei = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = 4 \right\}$$

Es ist sinnvoll, auch die beiden Rautenflächen in Parameterform darzustellen:

(5)
$$Rau_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid hx + hy + 4z = 0 \right\}; Rau2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid hx - hy + 4z = 0 \right\}$$

Daraus bestimmen sich sofort die Normalenvektoren der drei Ebenen:

(6)
$$\overrightarrow{n_{R1}} = \begin{pmatrix} h \\ h \\ 4 \end{pmatrix}; \overrightarrow{n_{R2}} = \begin{pmatrix} h \\ -h \\ 4 \end{pmatrix}; \overrightarrow{n_S} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Winkel zwischen den Ebenen und die Winkel zwischen ihren Normalenvektoren ergänzen sich jeweils zu 180°; wenn die Winkel zwischen je zwei Ebenen gleich sein sollen, müssen sie auch je zwischen ihren Normalenvektoren gleich sein.
(Diese Kurzform ist wieder Niveau III) Wenn Winkel gleich sind, sind ihre Cosinus-Werte auch gleich, und im hier betrachteten Bereich zwischen 0° und 180° gilt auch die Umkehrung.
Also genügt es, mit Hilfe der bekannten Beziehung

(7)
$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|}$$

die beiden Cosinuswerte gleichzusetzen:

(8)
$$\cos\angle Rau_1, Rau_2 = \frac{\overrightarrow{n_{R1}} \cdot \overrightarrow{n_{R2}}}{\left|\overrightarrow{n_{R1}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_{R2}}\right|} = \frac{16}{2h^2 + 16} \quad \cos\angle Rau_1, Sei = \frac{\overrightarrow{n_{R1}} \cdot \overrightarrow{n_S}}{\left|\overrightarrow{n_{R1}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_S}\right|} = \frac{4h}{4\sqrt{2h^2 + 16}}$$

(Niveau II) Dies führt zu einer biquadratischen Gleichung in *h*, deren einzige Lösung

(9) $h = 2\sqrt{2}$ ist.

Rückeinsetzen in (8) führt zum einem Winkel zwischen den Ebenen von 120°.

Auch der Turm des jüngsten Sohnes wird also um $2\sqrt{2}$ m erhöht, die Flächen stoßen unter einem Winkel von 120° aneinander.

Bemerkungen

- Diese Aufgabe entstammt dem Abiturjahrgang 1999 des Gymnasiums Kaiser-Friedrich-Ufer.

Unterrichtsgang

Der Unterrichtsgang im Verbindungssemester legte besonderen Wert auf die räumliche Anschauung von eben begrenzten Körpern (also Polyedern).
Von solchen Polyedern wurden zwei Klassen betrachtet:

- Reguläre Polyeder (auch wegen ihrer Ästhetik und der Möglichkeit, sie aus Geometriebaukästen darzustellen),
- und Polyeder, die in der Praxis – z.B. bei Bauten – auftreten. Die Aufgabe entstammt ersichtlich der zweiten Klasse.

An diesen Polyedern wurde die Anwendung der im 2. Semester gewonnenen Vorstellungen und Formeln von Ebenen, ihrer Beschreibung und ihrer gegenseitigen Lage geübt.
Zugleich boten solche Polyeder die Möglichkeit, ihre Form oder Größe nach gewissen Bedingungen hin zu optimieren – also analytische Methoden anzuwenden – , und sie boten auch die Möglichkeit, elementargeometrische und stereometrische Inhalte aus der Mittelstufe wieder aufzugreifen und mit Sinn zu erfüllen.

8. Beispiel – Grundkurs – Verbindung Lineare Algebra & Analysis

Steuerreform

Am 23.1.1997 wurde der Öffentlichkeit vom damaligen Bundesfinanzminister ein Konzept für eine mögliche Steuerreform im Bereich der Einkommenssteuer vorgestellt. Das – für diese Aufgabe interessante – Kernstück ist ein neuer Steuertarif.
Dieser Steuertarif für Alleinstehende wird so beschrieben (siehe z.B. Frankfurter Rundschau vom 24.1.97, S.5):

- Der Grundfreibetrag liegt bei 13014 DM. (Dieser ist steuerfrei.).
- Der darauf folgende Betrag bis zur Grenze von 18035 DM wird gleichmäßig mit 15% besteuert.
- Für den Bereich von 18035 DM bis 90017 DM ist ein linear wachsender Tarif vorgesehen, der an der unteren Grenze mit 22.5% beginnt und an der oberen Grenze mit 39% endet.
- Diese 39% Steuersatz sind zugleich der Spitzensteuersatz. Er gilt für alle Einkünfte oberhalb von 90017 DM.

1. Fertigen Sie aus diesen Angaben ein möglichst sorgfältiges Diagramm des Steuersatzes in Abhängigkeit vom Einkommen an.
2. Für Steuerzahler und Finanzamt interessant ist die Funktion *st*, die zu jedem steuerpflichtigen Einkommen *E* die zugehörige Jahreseinkommenssteuer *st(E)* (in DM) angibt.

   Begründen Sie, warum der Graph, den Sie in Aufgabenteil 1 hergestellt haben, nicht der Graph der Funktion *st* ist.

   Bestimmen Sie aus den vorliegenden Angaben (mit einer sinnvollen Interpretation) die Steuerfunktion *st*.

   > (Hinweis: Rechnen Sie zunächst mit voller Taschenrechnergenauigkeit. Geben Sie dann die Koeffizienten in *st* so an, dass eine auf Pfennige genaue Steuer abgelesen werden kann.)

   Stellen Sie auch *st* als Graph dar.

   Beschreiben Sie den mathematischen und den inhaltlichen Zusammenhang zwischen der Funktion *st* und der Funktion, dessen Graphen Sie in Aufgabenteil 1 hergestellt haben.
3. Bestimmen Sie schließlich – sozusagen als Steuerberater-Gehilfe – die nach dieser neuen Steuerfunktion anfallenden Jahressteuern bei Jahreseinkommen von

   a) 17450 DM

   b) 62000 DM

   c) 104000 DM

   Geben Sie in den drei Fällen auch jeweils den Durchschnitts- und den Grenzsteuersatz an.

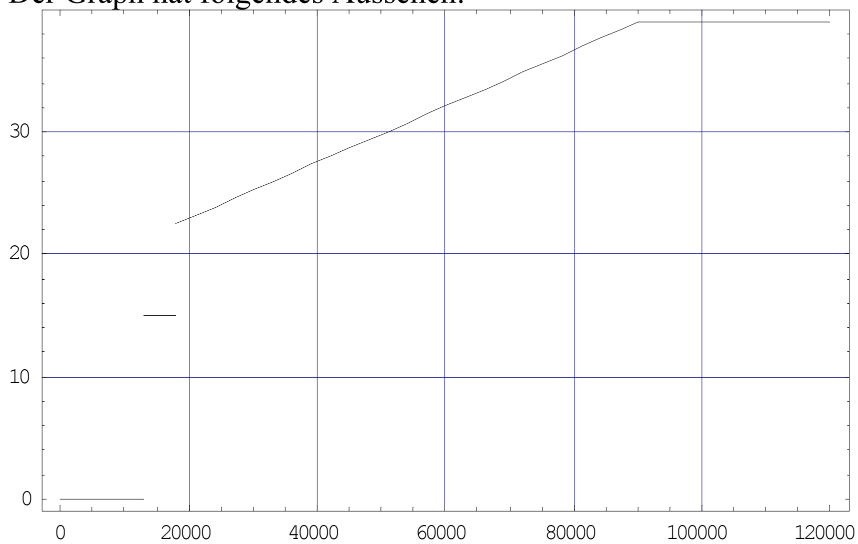
Lösungen

1. Sei die Steuersatzfunktion mit dem Symbol *pro* bezeichnet.
   pro ist eine stückweise definierte Funktion:

$$pro(E)=\begin{cases} pro_1(E)=0\% \ \textit{für}\ E \le 13014DM \\ pro_2(E)=15\% \ \textit{für}\ 13014DM < E \le 18035DM \\ pro_3(E)=(aE+b)\% \ \textit{für}\ 18035DM < E \le 90017DM \\ pro_4(E)=39\% \ \textit{für}\ 90017DM < E \end{cases}.$$

   Der lineare Term in pro_3 lässt sich aus den beiden Randpunkten (18035 DM | 22.5%) und (90017 DM | 39%) bestimmen. Es ergibt sich
   a = $2.29223973 \cdot 10^{-4}$ % / DM und b = 18.3639 %.

   Der Graph hat folgendes Aussehen:

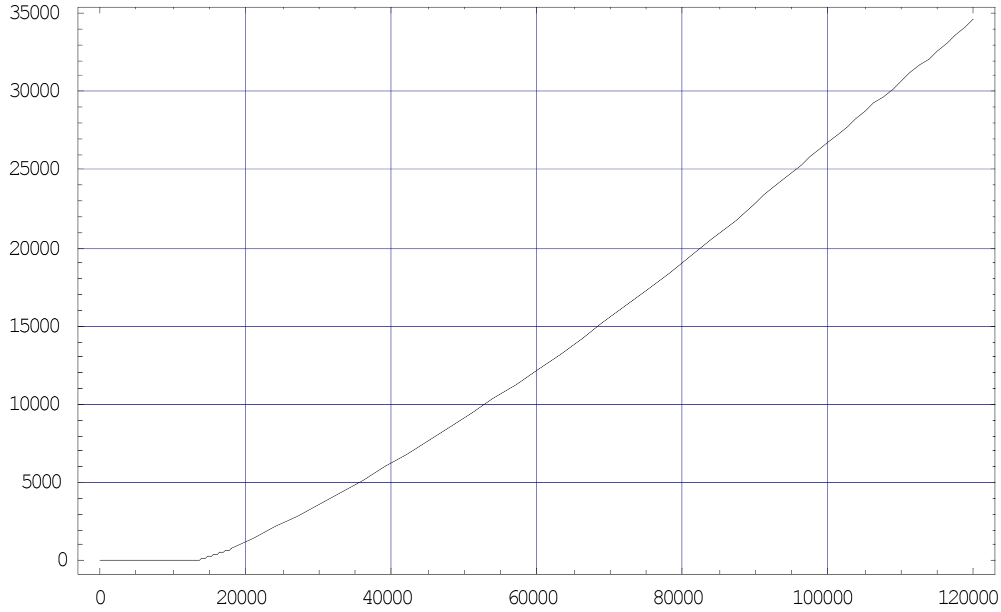


2. Die Funktion *st* ist eine Stammfunktion zu *pro*, und zwar die Stammfunktion, die die Randbedingung *st*(0) = 0 erfüllt und in ihren Teilen sprunglos aneinanderpasst. Dies ist auch mathematisch einzusehen, da die Steuerschuld durch die Fläche unterhalb des *pro*-Graphen repräsentiert wird.
   Da *pro* stückweise stetig (und damit stückweise integrabel) ist, gibt es *st*.
   Inhaltlich ist die Dimension von *st* DM, der Wert von *pro* muss also noch mit der Einheit der x-Achse multipliziert werden.

   st lässt sich am besten stückweise konstruieren:

   i) Für E ≤ 13014 DM ist st_1(E) = 0.
   ii) Für 13014 DM < E ≤ 18035 DM ist st_2(E) = 0.15 (E - 13014DM) .
   iii) Im dritten Bereich kann man die Steuerschuld als Fläche berechnen. Die Fläche ist ein Trapez mit der unteren Kante (E – 18035 DM) und der mittleren Höhe (pro(E) + 22.5%)/2. Dazu ist die Steuerschuld aus dem vorigen Bereich zu addieren. Dies ergibt $st_3(E)=0.5(E-18035DM)(aE+b+0.225)+st_2(18035)$.
   iv) Dies ist wieder einfach: $st_4(x)=0.39(E-90017DM)+st_3(90017DM)$

   Der Graph hat folgendes Aussehen:



3. Mit den gegebenen Funktionen lassen sich die drei Werte bestimmen:
   a) 17540 DM liegt im Bereich 2. Also *st*(17540DM) = 678.90 DM. Der Spitzensteuersatz beträgt 15%, der Durchschnittssteuersatz 3.87 %.
   b) 62000 DM liegt im Bereich 3. Also *st* (62000 DM) = 12860.60 DM. Der Spitzensteuersatz beträgt pro_3(62000 DM) = 32.58 %, der Durchschnittssteuersatz liegt bei 20.74 %.
   c) 104000 DM liegt im Bereich 4. Also *st* (104000 DM) = 28341 DM. Der Spitzensteuersatz beträgt 39 %, der Durchschnittssteuersatz liegt bei 27.25 %.

Bemerkungen

- Diese Aufgabe entspricht in Struktur und Inhalt einer Aufgabe von H. Zimmermann aus dem Abiturjahrgang 1998.
- Das Thema – und die Aufgabe – eignen sich ebenso für einen Unterricht, der nicht auf der Verwendung eines Taschenrechners aufbaut, sondern ein Tabellenkalkulationsprogramm oder ein CAA-Programm verwendet. (Hier wurden Graphiken und Werte mit MATHEMATICA erzeugt). Da die wesentlichen Tätigkeiten bei dieser Aufgabe ordnender und strukturierender Art sind, würde das Programm lediglich Rechnungen und Graphikerzeugung übernehmen.

Unterrichtsgang

Der Schwerpunkt dieses Verbindungssemesters lag in der mathematischen Modellierung von Situationen, vor allen solchen, bei denen die funktionale Beschreibung nur durch stückweise definierte Funktionen geschehen kann.

Solche stückweise definierten Funktionen wurden bezüglich ihrer Ableitung, vor allem aber bezüglich ihrer Stammfunktionen betrachtet; wesentlich war hierbei das mathematische Problem, wie man die Stücke durch geeignete oder geschickte Wahl ihrer Parameter so aneinanderlegen kann, dass sie glatt – wenn auch nicht knicklos – ineinander übergehen.

(Die Frage nach dem knicklosen Übergang wurde nur vergleichsweise kurz an ganzrationalen Funktionen besprochen.)

Verständlicherweise sind auch die Grundzüge und die Begrifflichkeit der Steuertarife Unterrichtsgegenstand gewesen; so sind der gegenwärtige Steuertarif und ein radikal vereinfachender (Uldall-Modell) intensiv besprochen worden.

9. Beispiel – Grundkurs – Verbindung und Vertiefung von Analysis und Geometrie (Kugelgeometrie)

Weltreise

1. Erklären Sie die Koordinaten auf einer Kugel. Erklären Sie dabei auch den prinzipiellen Unterschied zu Koordinaten in der Ebene.
2. Die drei südamerikanischen Orte Panama (P), Recife (R) und Kap Hoorn (H) haben (näherungsweise) die Koordinaten P = (l = 79°30‘ W; b = 9° N); R = (35° W; 8° S); H = (67° W; 66° S) . Bestimmen Sie mit diesen Koordinaten und einem Erdradius von r_E = 6370 km die Ortsdistanzen zwischen den drei Orten!
3. Die drei erwähnten Orte bilden ein Kugeldreieck, das ganz grob die Fläche von Südamerika annähert. Bestimmen Sie seine Fläche!
4. Drei Flugzeuge starten am 5. Februar morgens um 8 Uhr Ortszeit in Montevideo: M = (56° W; 35° S). Alle drei Maschinen haben als Flugziel Adelaide (A) in Australien; diese Stadt hat die Koordinaten A = (138° E; 35° S)

   a) Flugzeug I fliegt die gesamte Flugzeit über nach Osten.

   b) Flugzeug II fliegt die gesamte Flugzeit über nach Westen.

   c) Flugzeug III fliegt auf einem Großkreis.

   Wann landen die Flugzeuge jeweils nach Adelaider Ortszeit, wenn Sie annehmen, dass sie alle drei immer mit 800 km/h unterwegs sind? Man muss dazu wissen: Montevideo hat GMT – 4h, Adelaide hat GMT + 8h.
5. In Adelaide – bekanntermaßen eine Hafenstadt – steigt ein Hubschrauber auf. Wie weit kann man aus 500m Höhe (über dem Meer) schauen, also: Wie weit ist aus dieser Entfernung der Meereshorizont entfernt?

   Wenn man in 11.2 km Höhe im Flugzeug Adelaide überfliegt, welche Werte ergeben sich dann für Sichtweite und Horizontentfernung?

Lösungen

1. (Niveau II) Im Gegensatz zur Ebene lässt sich die Kugel nicht singularitätenfrei mit einem Koordinatensystem versehen (man denke an die Poincaré-Abbildung, die zeigt, dass die Kugel ohne einen Punkt zur Ebene homöomorph ist). Im Allgemeinen wird die Kugel allerdings nicht gemäß der Poincaré-Abbildung mit Koordinaten versehen, sondern mit Länge und Breite (bzw. mit Azimuth und Elevation oder mit Rektaszension und Deklination), und diese Koordinatensysteme geben zwei Punkten, den Polen, je nur eine Koordinate (die Breite) und einem halben Großkreis einen doppelten Wert. Im Fall der Erde ist das 180° E = 180° W, also i. W. die Datumsgrenze. (Darstellung der Poincaré-Abbildung: Niveau III)

2. (Niveau I) Alle drei geforderten Seiten lassen sich als Seiten je eines Polardreiecks auffassen und dann mit dem Seitencosinussatz berechnen, z.B. mit c = PR:
   $\cos c = \cos b_P \cdot \cos b_R + \sin b_P \cdot \sin b_R \cdot \cos(l_P - l_R)$.
   Es ergeben sich – nach Multiplikation mit dem Erdradius –
   dis(PR) = 5278 km
   dis(RH) = 6898 km
   dis(HP) = 8401 km

3. (Niveau II) Der Flächeninhalt eines Kugeldreiecks bestimmt sich mit Hilfe des sphärischen Exzesses $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ zu $A = \varepsilon\, r^2$.
   Um die drei Eckwinkel zu bestimmen, kann man den Seitencosinussatz nach dem Eckwinkel auflösen (auch eine Verwendung der Halbwinkelsätze ist möglich):
   $$\cos\gamma = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} \ .$$
   Es ergeben sich die Winkel
   p = 65.126°
   r = 95.949°
   h = 49.198° .
   (Niveau II) Daraus ergibt sich die Fläche des Kugeldreiecks zu A = 21 440 000 km².

4. (Niveau I) Die Flugzeuge I und II fliegen beide auf demselben Breitenkreis. Die Flugstrecke berechnet sich dann zu $f = r_E \cos b \cdot \frac{\pi}{180°} \Delta l$
   Flugzeug I fliegt somit 17668 km und ist damit 22 h 5 min unterwegs. Es landet also am 6. Februar 06:05 h Ortszeit M. Da A 12 Stunden weiter in der Zeit ist, landet es in A am 6. Februar 18:05 h Ortszeit A.

   (Niveau II) Flugzeug II fliegt somit 15118 km und ist damit 18 h 54 min unterwegs. Es landet also am 6. Februar 04:54 h Ortszeit M. Da A 12 Stunden in der Zeit zurück ist, die Passagiere aber – im Gegensatz zu denen in Flugzeug I – einmal die Datumsgrenze überflogen haben, so dass ihr Kalender einen Tag vorangestellt wurde, ist der Zeitverschiebungseffekt netto wieder +12 Stunden. Also landet dieses Flugzeug in A am 6. Februar 16:54 h Ortszeit A.
   (Der Datumswechsel geschah nach 14 h 7 min Flugzeit im Flugzeug, bei mitlaufender M-Ortszeit also um 22:07 h. - Niveau III)

(Niveau I) Flugzeug III hingegen fliegt aus einem Großkreis, dessen Länge sich wieder mit dem Seitencosinussatz aus dem Polardreieck bestimmen lässt. Die Flugstrecke – übrigens westwärts – beträgt 12095 km und die Flugzeit 15 h 7 min. (Niveau II) Mit den oben erwähnten Argumenten ergibt sich eine Adelaider Landezeit von 01:07 h am 6. Februar.
(Niveau III - Das Flugzeug würde übrigens bis etwa 80° S fliegen, was eher unrealistisch ist.)

5. (Niveau II) Dieser Teil lässt sich mit ebener Trigonometrie lösen:
$$sichtweite = \sqrt{(r_E + h)^2 - r_E{}^2}$$
$$horizontentfernung = r_E \cdot \arctan\left(\frac{sichtweite}{r_E}\right)$$
Die Zahlen ergeben sich für den Hubschrauber zu *sichtweite* = 79.813 km, *horizontentfernung* = 79.810 m. (Niveau III) Die Unterschiede sollten nicht übergewichtet werden – vor allem in Anbetracht der Genauigkeit der gegebenen Zahlen und der Situation ist die Antwort „Man kann 80 km weit auf das Meer blicken“ wesentlich sinnvoller.
(Niveau II) Beim Stratosphärenflugzeug ist die Sichtweite 377.9 km, dort ist der Horizont 377.5 km entfernt. Auch hier ist also die Differenz eher unbedeutend.

Bemerkung

- Diese Aufgabe basiert auf einer Aufgabe von Th. Nohr aus dem Jahrgang 2001.

Unterrichtsgang

Der Unterricht in diesem Verbindungssemester hat als Hauptinhalt die *Sphärische Trigonometrie* mit der Anwendung des Zurechtfindens auf der Erde.

Schwerpunkte sind
1. **Kugelkoordinaten** mit den Unterpunkten
   - Erinnerung an die Möglichkeiten, die Ebene mit Koordinaten zu versehen;
   - die Betonung der Erfahrung, dass auf der Kugel auch zwei Koordinatenangeben reichen;
   - die Frage nach den möglichen Koordinatensystemen auf der Kugel, verbunden mit der Untersuchung, ob Kugel und Ebene aufeinander homöomorph abbildbar sind;
   - die Einführung der üblichen Kugelkoordinaten.

2. **Großkreise und Kleinkreise und der Entfernungsbegriff**

3. **Kugeldreiecke** mit den Unterpunkten
   - Sinussatz
   - Seitencosinussatz
   - Winkelcosinussatz
   - Fläche von Kugeldreiecken

4. **Koordinaten auf der Erde** mit den Unterpunkten
   - Zeitzonen und Datumsgrenze
   - Flugrouten
   - Start- und Landekurse bei loxodromem Flug

In allen diesen Punkten ist sowohl die Rückbesinnung an die Geometrie und an die Winkelfunktionen vertreten wie auch durch die Betonung von Entsprechungen und Unterschieden die (ebene) Geometrie und damit die Lineare Algebra.

10. Beispiel – Grundkurs – Verbindung Analysis & Lineare Algebra/Geometrie

---

Vier Käfer verfolgen sich

Vier mathematische Käfer sitzen auf den Eckpunkten eines Quadrats mit der Seitenlänge 4. Sie beginnen gleichzeitig mit gleicher und konstanter Geschwindigkeit loszulaufen. Die Richtung, in der jeder Käfer läuft, ist dabei die Richtung, in der sich jeweils der im Uhrzeigersinn nächste Käfer befindet.
Welche Bahnen erzeugen die Käfer?

1. Lösen Sie dieses Problem, indem Sie mit Hilfe von EXCEL ein Differenzenverfahren aufbauen und durchführen.
   Es scheint dabei sinnvoll, die Startpunkte symmetrisch zum Ursprung anzuordnen.

   Ihre Lösung muss enthalten:
   - die Angabe des Differenzencodes;
   - eine ausführliche Begründung für Ihr Vorgehen;
   - die EXCEL-Tabelle als File;
   - ein EXCEL-Diagramm, das die geforderten Bahnen sichtbar macht.

2. Bestimmen Sie des Weiteren in einer zusätzlichen Spalte Ihrer Tabelle den jeweiligen Winkel zwischen der Kurve und der Verbindung der Kurve zum Ursprung. Was stellen Sie fest?

3. Was passiert, wenn Sie die Schrittweite Ihres Differenzencodes ändern?

Lösungen

1. (Niveau I) Die vier Startpunkte mögen (2 ; 2) ; (-2 ; 2) ; (-2 ; -2) und (2 ; -2) sein. Jeder Punkt bekommt für seine Koordinaten zwei Spalten (siehe Tabelle). In einem Rechenschritt des Differenzencodes bewegt sich jeder Punkt um die voreingestellte Länge ds (hier abgelegt unter $B$1).
(Niveau II) Die Richtung seiner Bewegung ist die Richtung auf den Nachbarpunkt – also ist der Richtungsvektor in jeder Komponente die Differenz der Koordinaten zum Nachbarpunkt. Die Bewegungsweite ist ds mal dem normierten Richtungsvektor.
(Niveau II) Zum Normieren wird der Abstand zweier Punkte benötigt; da alle Punkte denselben Abstand aufweisen, braucht er nur einmal bestimmt zu werden. Der Abstand steht unter dis(P1,P2) in Spalte I und hat das Spaltenkommando

I_i = WURZEL((C_i-A_i)^2+(D_i-B_i)^2)

Mit diesem Abstand können dann die neuen Koordinaten der Punkte im nächsten Schritt bestimmt werden. Dies ergibt, z.B. für den Punkt P1, die beiden Spaltenkommandos (für die x- und die y-Koordinate):

A_{i+1} = A_i+$B$1*(C_i-A_i)/$$I_i$ und B_{i+1} = B_i+$B$1*(D_i-B_i)/$$I_i$

Beim vierten Punkt muss der Bezug auf die entsprechenden Spalten angepasst werden.

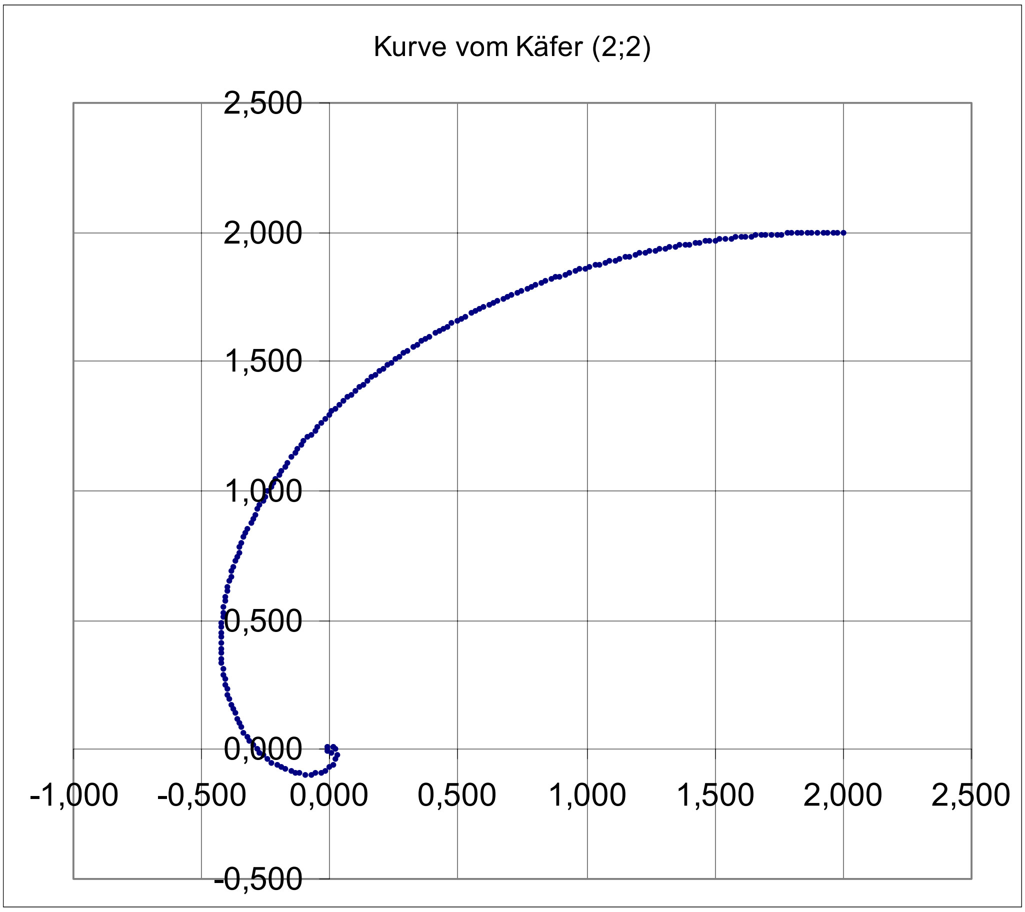
(Niveau I) Dann kann die Tabelle durch „Ziehen“ vervollständigt werden.

(Niveau II) Das Ende der Berechnung ist praktisch dann erreicht, wenn die Punkte immer wieder erreicht werden (das geschieht dann, wenn ihr Nullpunktsabstand mit ds vergleichbar wird). In dieser Rechnung geschieht dies etwa ab dem 200. Schritt.

Die folgende Tabelle zeigt den Beginn der Rechnungen.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
ds =	0,020								
x1	y1	x2	y2	x3	y3	x4	y4	dis(P1,P2)	phi
2,000	2,000	-2,000	2,000	-2,000	-2,000	2,000	-2,000	4,000	
1,980	2,000	-2,000	1,980	-1,980	-2,000	2,000	-1,980	3,980	45,144
1,960	2,000	-2,000	1,960	-1,960	-2,000	2,000	-1,960	3,960	45,145
1,940	2,000	-2,000	1,940	-1,940	-2,000	2,000	-1,940	3,940	45,145
1,920	1,999	-1,999	1,920	-1,920	-1,999	1,999	-1,920	3,920	45,146
1,900	1,999	-1,999	1,900	-1,900	-1,999	1,999	-1,900	3,900	45,147
1,880	1,998	-1,998	1,880	-1,880	-1,998	1,998	-1,880	3,880	45,148
1,860	1,998	-1,998	1,860	-1,860	-1,998	1,998	-1,860	3,860	45,148
1,840	1,997	-1,997	1,840	-1,840	-1,997	1,997	-1,840	3,840	45,149
1,820	1,996	-1,996	1,820	-1,820	-1,996	1,996	-1,820	3,820	45,150
1,800	1,995	-1,995	1,800	-1,800	-1,995	1,995	-1,800	3,801	45,151
1,780	1,994	-1,994	1,780	-1,780	-1,994	1,994	-1,780	3,781	45,152
1,760	1,993	-1,993	1,760	-1,760	-1,993	1,993	-1,760	3,761	45,152
1,740	1,992	-1,992	1,740	-1,740	-1,992	1,992	-1,740	3,741	45,153
1,720	1,991	-1,991	1,720	-1,720	-1,991	1,991	-1,720	3,721	45,154
1,700	1,989	-1,989	1,700	-1,700	-1,989	1,989	-1,700	3,701	45,155
1,680	1,988	-1,988	1,680	-1,680	-1,988	1,988	-1,680	3,681	45,156

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
ds =	0,020								
x1	y1	x2	y2	x3	y3	x4	y4	dis(P1,P2)	phi
1,660	1,986	-1,986	1,660	-1,660	-1,986	1,986	-1,660	3,661	45,157
1,640	1,984	-1,984	1,640	-1,640	-1,984	1,984	-1,640	3,641	45,157
1,621	1,982	-1,982	1,621	-1,621	-1,982	1,982	-1,621	3,621	45,158
1,601	1,980	-1,980	1,601	-1,601	-1,980	1,980	-1,601	3,601	45,159
1,581	1,978	-1,978	1,581	-1,581	-1,978	1,978	-1,581	3,581	45,160
1,561	1,976	-1,976	1,561	-1,561	-1,976	1,976	-1,561	3,561	45,161
1,541	1,974	-1,974	1,541	-1,541	-1,974	1,974	-1,541	3,541	45,162
1,521	1,971	-1,971	1,521	-1,521	-1,971	1,971	-1,521	3,521	45,163
1,501	1,969	-1,969	1,501	-1,501	-1,969	1,969	-1,501	3,501	45,164
1,482	1,966	-1,966	1,482	-1,482	-1,966	1,966	-1,482	3,481	45,165
1,462	1,963	-1,963	1,462	-1,462	-1,963	1,963	-1,462	3,461	45,166
1,442	1,960	-1,960	1,442	-1,442	-1,960	1,960	-1,442	3,442	45,166
1,422	1,957	-1,957	1,422	-1,422	-1,957	1,957	-1,422	3,422	45,167
1,402	1,954	-1,954	1,402	-1,402	-1,954	1,954	-1,402	3,402	45,168
1,383	1,951	-1,951	1,383	-1,383	-1,951	1,951	-1,383	3,382	45,169
1,363	1,948	-1,948	1,363	-1,363	-1,948	1,948	-1,363	3,362	45,170
1,343	1,944	-1,944	1,343	-1,343	-1,944	1,944	-1,343	3,342	45,171
1,324	1,940	-1,940	1,324	-1,324	-1,940	1,940	-1,324	3,322	45,172
1,304	1,937	-1,937	1,304	-1,304	-1,937	1,937	-1,304	3,302	45,174
1,284	1,933	-1,933	1,284	-1,284	-1,933	1,933	-1,284	3,282	45,175
1,265	1,929	-1,929	1,265	-1,265	-1,929	1,929	-1,265	3,262	45,176



(Niveau II) Das Diagramm zeigt die Bahn des Käfers, der in (2 ; 2) beginnt.

2. (Niveau I) Der Winkel lässt sich berechnen über den Cosinus zwischen dem Ortsvektor des Punkts und dem Tangentenvektor.
   (Niveau II) Letzterer steht näherungsweise als Verbindung dieses und des vorigen Punkts zur Verfügung; (Niveau III) noch besser ist es, den Tangentenvektor als Verbindung des letzten und des nächsten Punkts zu nähern.

   (Niveau I) Den Winkel erhält man über $\alpha = \arccos \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{|\vec{r}| \cdot |\vec{p}|}$.

   (Niveau II) Das entsprechende Spaltenkommando lautet

   J_i = 180/PI()*ARCCOS((-A_i*(A_{i+1}-A_{i-1})-B_i*(B_{i+1}-B_{i-1}))/
   (WURZEL(A_i^2+B_i^2)*WURZEL((A_{i+1}-A_{i-1})^2+(B_{i+1}-B_{i-1})^2)))

   Die Ergebnisse stehen in Spalte J, und man sieht, dass der Winkel näherungsweise 45° beträgt und konstant ist. (Niveau III) Es ist also zu vermuten, dass die Spirale Linien gleichen Abstands vom Zentrum (also Kreise) immer unter dem konstanten Winkel 45° schneidet.

3. (Niveau II) Wenn die Schrittweite verkleinert wird, ändert sich am Ergebnis nichts Wesentliches. Natürlich werden mehr Schritte benötigt. (Niveau II) Der Winkel ist näher an 45°. (Niveau III) Das Einmünden in periodische Werte in der Nähe des Ursprungs geschieht später.

Bemerkungen

- Diese Aufgabe entstammt einem Aufsatz von K. Strick, Leverkusen [**MNU 53/8** (2000), 467]
- Eine Anordnung der Startpunkte auf den Achsen ist nach der Aufgabenstellung ebenso möglich.
- Dieser Kurventyp - Archimedische Spirale – und auch logarithmische Spiralen ist nicht Unterrichtsgegenstand gewesen.

Unterrichtsgang

Das Thema des 3. Semesters als Verbindung von Linearer Algebra und Analysis ist die Darstellung von komplexeren Abläufen und Funktionen auf lokale Weise, also durch Differenzenverfahren. Das Wesen dieses Verfahrens ist die Linearisierung von Kurven, weswegen das Wissen um Richtungen und Richtungsvektoren sinnvoll angewendet werden kann. Als Problemstellungen werden Aufgaben gewählt, die sich gut in der Ebene darstellen lassen.

Methodisch wird das Tabellenkalkulationsprogramms EXCEL verwendet, das sich auf Grund seiner Struktur für diese Arbeiten hervorragend eignet und zugleich eine gute Auswahl möglicher graphischer Darstellungen zur Verfügung stellt.

Der Unterricht hatte folgende Schwerpunkte:

Schwerpunkt Funktionen, Tangenten, Winkel

- Darstellung des Verlaufs einer Funktion „aus der Kenntnis ihres lokalen Verhaltens“ (also unter Verwendung der Ableitung)
- Veranschaulichung der Idee der Differentialgleichung
- Tangenten in der Ebene als Vektoren
- Wiederholung Winkel zwischen Vektoren

Schwerpunkt Umgang mit EXCEL

- Feste und variable Zellennamen
- Spaltenkommandos (drag und drop)
- Funktionen
- Graphische Darstellungen

Schwerpunkt Differenzenverfahren

- Problemstellung
- Auflösung einer kontinuierlichen Funktion / eines kontinuierlichen Vorgangs in Einzelschritte unter Verwendung der Änderung der Funktion zur Bestimmung der „neuen“ Werte
- Übung an:
    - Flugkurven mit und ohne Luftwiderstand
    - Lineare Bewegung von einem rotierenden Koordinatensystem aus
    - Darstellung einer Traktrix
    - Darstellung eines kartesischen Blatts
- Beobachtung der Folgen der Wahl der Schrittweite

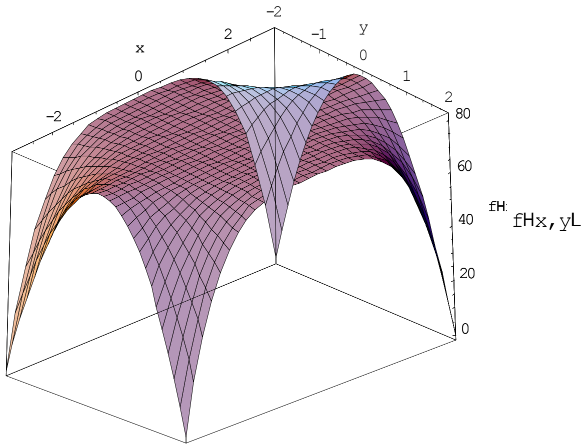
11. Beispiel - Leistungskurs – Vektor-Analysis

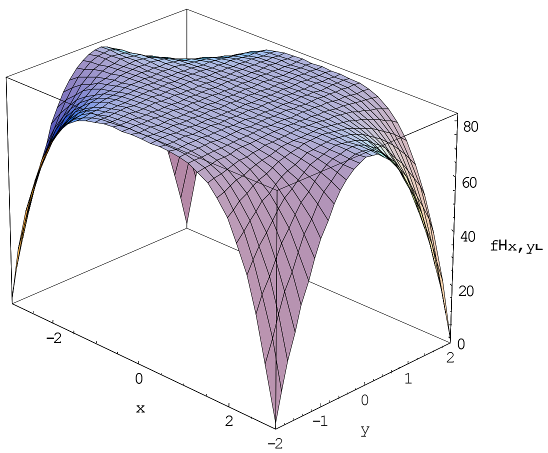
Ein Dach aus einer Funktion

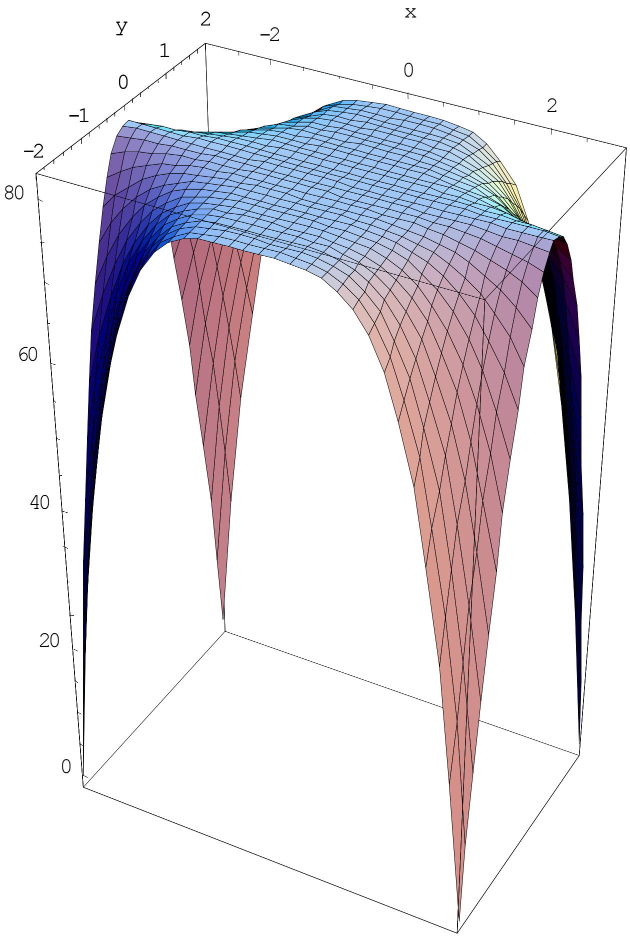
Gegeben ist die rechtwinklige Grundfläche $F = \{(x, y) \mid -3 \le x \le 3 \wedge -2 \le y \le 2\}$
Auf dieser Menge von Zahlenpaaren ist die Funktion *f* definiert durch

$$f(x, y) = 81 - \frac{1}{4} x^4 y^2 \ .$$

Im Folgenden wird die Fläche, die durch *f* über *F* aufgepannt wird, als DACH bezeichnet.
Die Ansichten zeigen dieses DACH als 3D-Darstellung, unten mit stark verkürzter f(x,y)-Achse:







1. Zeigen Sie, dass das DACH mit seinen „Fußspitzen“ tatsächlich auf der x-y-Ebene an den Eckpunkten von *F* steht.
2. Eine zur Grundfläche F parallele Ebene *C*(h) hat über *F* die Höhe h. Ersichtlich schneidet *C*(h) das DACH, solange $0 \le h \le 81$ gilt. Bestimmen Sie die Gleichungen der Schnittkurven, als Funktionen $y_{\pm}(x)$ aufgefasst, in Abhängigkeit von h!

3. Der Punkt P sei definiert als P = (2 ; 1 ; f(2;1)). Wie lautet dann die Gleichungen der Schnittkurven, die P enthalten?
4. Geben Sie die Funktionsgleichungen der beiden, ja ersichtlich verschiedenen, Eingangsbögen des DACHS an!
5. Hat das DACH bei (x;y) = (0;0) ein relatives Maximum oder ein relatives Minimum oder keines von beiden? Beweisen Sie Ihre Aussage!
6. Die Ebene *E* berührt das DACH bei P . Geben Sie *E* in einer sinnvollen Form an und bestimmen Sie das Volumen des Tetraeders, das *E* mit den Achsen und dem Ursprung bildet!
7. Bestimmen Sie das Volumen des Raumes unter dem DACH!

Lösungen:

1. (Niveau I) Zu bilden ist *f*(3,2) : *f*(3;2) = 0. Da *f* in x und y gerade ist, ist dieser Wert für alle vier Fußpunkte gleich.
2. (Niveau I) Mit $h = 81 - 0.25x^4y^2$ ergibt sich $y_\pm(x) = \pm\dfrac{2\sqrt{81-h}}{x^2}$.
3. (Niveau II) Da *f*(2;1) = 77, gilt hier $y_\pm(x) = \pm\dfrac{4}{x^2}$
4. (Niveau II) Die gewünschten Funktionen ergeben sich aus *f* durch Einsetzen:
   $f_{x=3}(y) = 81(1 - 0.25y^2)$ *und* $f_{y=2}(x) = 81 - x^4$
5. i) *f* ist in beiden Variablen differenzierbar.
   ii) *f*(0;0) = 81
   ii) Für alle Paare (x ; y) ≠ (0 ; 0) wird bei *f* von der 81 etwas Positives abgezogen, der Funktionswert ist also kleiner als 81.
   Also liegt bei (0;0) ein (absolutes) Maximum vor. (Niveau II)

6. (Niveau II) Es bietet sich zunächst an, *E* in der Punkt-Richtungs-Form anzugeben und die Richtungsvektoren parallel zur x-z-Ebene und parallel zur y-z-Ebene anzugeben. In diesen beiden Ebenen sind nämlich die Richtungsvektoren einfach die Werte des Gradienten von *f* in (2;1).

   Allgemein ergibt sich $gradf = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^3y^2 \\ -0.5x^4y \end{pmatrix}$.

   Damit gilt $\dfrac{\partial f}{\partial x}|_{x=2,y=1} = -8$ *und* $\dfrac{\partial f}{\partial y}|_{x=2,y=1} = -8$.

   Da *f*(2;1) = 77, ergibt sich $E = \left\{ \vec{x} \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 77 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in R \right\}$.

Umrechnung in die Hesse-Restriktions-Form ergibt $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \frac{x}{101/8} + \frac{y}{101/8} + \frac{z}{101} = 1 \right\}$

Die Achsenschnittpunkte liegen damit bei $x_S = 101/8$, $y_S = 101/8$ und $z_S = 101$.

Das Tetraedervolumen ergibt sich mit $V_T = \frac{1}{6} x_S y_S z_S$ zu $V_T \approx 2683.075$.

Ein Lösungsansatz über die Tangentengleichung führt genauso schnell zu einer Restriktion der Ebenen.

7. (Niveau III, da in diesem Zusammenhang noch nicht durchgeführt) f ist auf F positiv definiert, damit $V = \int_{-2}^{2}\int_{-3}^{3} f(x,y)dxdy = 2\int_{-2}^{2}\int_{0}^{3} \left[81x - \frac{x^5 y^2}{20} \right] dxdy$. Mit den Regeln der abschnittsweisen Lösung von Mehrfachintegralen ergibt sich $V = 1814.4$.

Unterrichtsverlauf:

Der Unterricht, dem diese Aufgabe entstammt, hat als Verbindung von Analysis und Analytischer Geometrie seinen Schwerpunkt auf reelle Funktionen mehrerer Variablen gelegt. Unterschwerpunkte sind dann:

- Graphische Darstellung von Funktionen zweier Variablen
- Differentiation von Funktionen mehrerer Variablen; partielle Ableitung; Gradient
- Geometrische Bedeutung des Gradienten
- Integration von Funktionen mehrerer Variablen
- Ebenendarstellungen im $\mathbf{R}^3$
- Tangentialebenen an Funktionen zweier Variablen
- Verbindung Tangentialebene - Gradient
- Schnitte von Ebenen mit Funktionen zweier Variablen

Bemerkungen:

- Diese Aufgabe basiert auf einer Aufgabe von H. Thier aus dem Abitur 2001.
- Die Graphiken wurden hier mit Mathematica erzeugt.
- Es ist gut vorstellbar, dass der Unterricht, dem diese Aufgabe entspringt, laufend ein CAA-Programm einsetzt und die dabei erworbenen Fähigkeiten auch bei der Abituraufgabe verwendet. Die Lösung der Aufgabenteile 1 – 5 ist dabei vom Programm-Einsatz unabhängig. Teil 7 wäre direkt bestimmbar – in z.B. Mathematica lautete die entsprechende Anweisung mit Ergebnis

  ```
  V= NIntegrate@f@x, yD, 8x, -3, 3<, 8y, -2, 2<D
  1814.4
  ```

  und damit entscheidend einfacher.

  Deswegen scheint es sinnvoll, hier die Teile 6 und 7 zu vertauschen und Teil 6 – nunmehr Teil 7 - etwas aufzuwerten:

7. Die Ebene *E* berührt das DACH bei Q = (x; y; f(x;y)) . Geben Sie *E* in einer sinnvollen Form an.

Bestimmen Sie das Volumen des Tetraeders, das *E* mit den Achsen und dem Ursprung bildet, in Abhängigkeit von x und y

und geben Sie den Punkt Q aus dem I. Quadranten an, für den das Volumen seines Tetraeders minimal ist!

12. Beispiel - Leistungskurs – Verbindung Analysis & Lineare Algebra / Vektorraumtheorie

---

Arbeiten an einer ganzrationalen Funktion

Von einer ganzrationalen Funktion 4. Grades namens *f* sind folgende Sachverhalte bekannt :

i) *f* ist gerade.
ii) *f* hat vier Nullstellen.
iii) Die inneren Nullstellen liegen bei $x_{N\,1/2} = \pm 1$.
iv) Das bestimmte Integral über *f* im Bereich zwischen den äußeren Nullstellen ist Null.
v) Das Maximum (es gibt nur eines) hat einen Funktionswert von 6.

1.1 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.
1.2 Fertigen Sie eine hinreichend gute Skizze der Funktion an .

2. In die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion und der x-Achse im Bereich zwischen den inneren Nullstellen wird ein Rechteck so eingefügt, dass seine eine Seite auf der x-Achse liegt.
Bestimmen Sie die Länge der waagerechten Seite des Rechtecks mit dem maximalen Flächeninhalt !

3. Betrachten Sie jetzt die Menge der ganzrationalen Funktionen höchstens 4. Grades. Sie sei mit G_4 bezeichnet.
3.1 Zeigen Sie, dass im Vektorraum $\{G_4, +\}$ über R die Menge der geraden Funktionen G_{ger4} einen Untervektorraum bildet.
3.2 Als skalares Produkt zweier Funktionen diene die Abbildung

$$\circ : G_4 \, x \, G_4 \to R \quad mit \quad f \circ g = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx$$

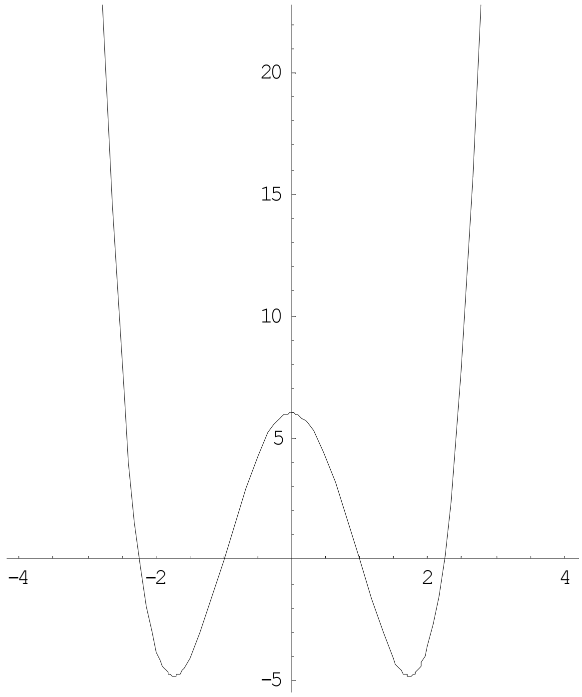
3.2.1 Zeigen Sie, dass keine Funktion *h*: x → c mit c ≠ 0 zu *f* orthogonal bezüglich dieses Skalarprodukts ist.
3.2.2 Zeigen Sie, dass die Funktion $g : x \to g(x) = -21x^2 + 4$ zu *f* orthogonal ist.
3.2.3 Geben Sie einen Rechenweg an, mit dem Sie jetzt eine Ortho-Basis für den G_{ger4} unter Verwendung der Funktionen *f* und *g* konstruieren würden!

Lösungen

1.1. (Niveaus I und II)
Dieser Teil erfordert etwas Kombinationsgabe, wenn man nicht sehr lange rechnen will. Aus i) folgt, dass nur die Koeffizienten vor den Termen 4., 2. und 0. Ordnung zu bestimmen sind : $f(x)=ax^4+bx^2+c$;
ii) mit iii) legt eine Dekomposition in Nullstellenlinearterme nahe :
$f(x)=a(x^2-1)(x^2-x_{AN}{}^2)=ax^4-a(1+x_{AN}{}^2)x^2+ax_{AN}{}^2$;
v) ergibt c zu 6 ;
iv) schließlich ergibt die Beziehung $0=\frac{a}{5}\cdot x_{AN}{}^4-\frac{a+6}{3}\cdot x_{AN}{}^2+6$

Daraus ergibt sich : $f(x)=\frac{6}{5}x^4-\frac{36}{5}x^2+6$

1.2



2. (Niveau II) Dies ist eine normale Extremwertaufgabe. Der Flächeninhalt der Rechtecke ist $A(x)=2x\cdot f(x)$, wobei (x;f(x)) ein Punkt auf dem Graphen mit $0 \le x \le 1$ ist. Diese Funktion soll maximal werden, also $0 = A'(x_{max})$. Dies führt zur biquadratischen Gleichung $0=\mathrm{x}_{\max}{}^4-\frac{18}{5}\mathrm{x}_{\max}{}^2+1$, deren einzige Lösung im betrachten Bereich $x_{\max}=\sqrt{\frac{9-\sqrt{56}}{5}}\approx 0.55076$ ist. Die gefragte Länge ergibt sich zu 1.10152.

3.1 (Niveau I) Die Anwendung der bekannten Bedingungen für einen Unterraum führt leicht zum gewünschten Resultat.

3.2.1 (Niveau II) Orthogonalität bedeutet: Das Skalarprodukt der beiden Faktoren ist Null.
Hier müsste also gelten: $f\circ h=0 \Leftrightarrow sp:=\int_{-1}^{1}c\cdot(\frac{6}{5}x^4-\frac{36}{5}x^2+6)dx=0$

Die Auswertung dieses Integrals liefert (unter Ausnutzung der Geradheit der Funktion)
$SP(c)=c\cdot 2\cdot\left[0.24x^5-2.4x^3+6x\right]_0^1=7.68c$, was für alle erlaubten c nicht Null ist.

3.2.3 (Niveau II) Hier ist

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{6}{5}x^4-\frac{36}{5}x^2+6\right)\cdot(-21x^2+4)dx=2\int_{0}^{1}(-25.2x^6+156x^4-154.8x^2+24)dx=:SP$$

auszuwerten.

Das Ergebnis ist: $SP = 0$. Damit sind die beiden Funktionen orthogonal.

3.2.3 (Niveau III) Nun, die Orthobasis muss drei Elemente enthalten. Zwei davon haben wir schon, und für die dritte Funktion wissen wir, dass es keine konstante Funktion sein kann.

Sei die dritte Funktion $h(x)=ax^4+bx^2+c$, dann muss gelten:

$$\int_{-1}^{1}h(x)\cdot f(x)dx=0 \wedge \int_{-1}^{1}g(x)\cdot h(x)dx=0.$$

Dies ergibt – vor allem wegen der günstig gewählten Grenzen – zwei lineare Gleichungen der drei Koeffizienten, und falls die Bedingungen nicht widersprüchlich sind, ergibt sich eine eindimensionale Mannigfaltigkeit von Lösungen des LGS, also eine einparametrige Schar von Funktionen *h*, die den Bedingungen genügen.

(Bemerkung: Führt man die – etwas umständliche – Rechnung durch, so erhält man das LGS

$$\frac{32}{105}a+\frac{8}{7}b+\frac{216}{25}c=0 \wedge \frac{-11}{5}a-\frac{43}{15}b-3c=0$$

das – zunächst überraschend – keine Lösung außer der trivialen hat. Es gibt also keine Orthobasis unter Verwendung von *f* und *g*.)

Bemerkungen

- Die Aufgabe basiert auf einer Aufgabe des Abiturjahrgangs 93.
- Bei dieser Aufgabe ist es möglich, die Schwerpunkte zu verschieben und den algebraischen Anteil zu vergrößern. Eine Frage, die den Punkt 5 weiter ausbaut, wäre:

3.3 Zeigen Sie, dass B:= $\{f_0(x) = c, f_2(x) = bx^2, f_4(x) = ax^4\}$ für a,b,c $\neq 0$ zwar eine Basis des G_{ger4} bildet, aber für keine solche a, b und c eine Orthobasis.

Lösung

Die Basiseigenschaft ist sofort zu sehen.

Für die Orthogonalität muss wieder untersucht werden:

$$f_0\circ f_2=\frac{2}{3}bc\neq 0;\ f_0\circ f_4=\frac{2}{5}ac\neq 0;\ f_2\circ f_4=\frac{2}{7}ab\neq 0$$

Unterrichtsgang

- Diese Aufgabe benötigt ersichtlich für die Teile 1.1 – 1.3 den Standardstoff jeder Erörterung der Analysis, der Teil des Unterrichts im 1. Semester ist.
- Extremwertaufgaben – nicht nur des hier angesprochenen Standardtyps – sind ein durchgehender Topos der ersten drei Semester.
- Ab dem 2. Semester kam die Lineare Algebra hinzu. Hierbei wurde von vorn herein die Verbindung gesucht – sei es, weil die Lösung von LGS , die z.B. schon in Aufgaben des

Typs 1.1 verwendet wird, selbst thematisiert wird, sei es, dass Funktionenmengen in ihrer algebraischen Struktur untersucht werden.

- Der Unterrichtsgang beinhaltete:
  - LGS und Lösungstheorie
  - Vektorraumbegriff, -definition, Unterraum
  - Der $\mathbf{R}^n$ als Vektorraum
  - Beispiele für Funktionenräume: Raum der grF, Raum der Funktionen des Typs sin(kx) (der Fourier-Funktionen)
  - Begriff des Skalaren Raums
  - Skalarprodukt für den $\mathbf{R}^n$
  - Skalarprodukt für Funktionenräume: Integral des Funktionenprodukts
  - Basen und Orthobasen
  - Orthogonalität des Skalaren Raums der Fourier-Funktionen

Die Konstruktion einer Orthobasis, wie sie in 3.2.3 durchgeführt wird, war an diesem Funktionentyp nicht Unterrichtsgegenstand.

13. Beispiel – Grundkurs – Bereich Verbindung Stochastik & Analysis

1. Beschreiben Sie die Binomial-Verteilung und die hypergeometrische Verteilung.

- Welche Situation, welche Fragestellung kann durch die erste Verteilung beschrieben werden, welche durch die zweite? (Sie können dabei durchaus die Idee der Urnenmodelle verwenden.)
- Stellen Sie dar, wie sich die Formeln für die beiden Verteilungen ergeben!
- Argumentieren Sie, warum im Fall $n \to \infty$ die hypergeometrische Verteilung gegen die Binomial-Verteilung strebt.

2. Wenden Sie diese Überlegungen jetzt an.
   Sie haben eine Urne mit 150 Kugeln, davon sind 60 weiß, die anderen schwarz.

- Sie holen zehn Kugeln heraus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter diesen sechs schwarze sind?
- Sie greifen zehnmal in die Urne, notieren sich die Farbe der Kugel und legen die Kugel zurück. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie viermal eine weiße Kugel vor sich gesehen haben?

3. Vervollständigen Sie jetzt diese Überlegungen – verwenden Sie dazu das Ihnen gut bekannte Programm EXCEL.

- Fertigen Sie ein Diagramm an, in dem Sie bei der oben eingeführten Urne für insgesamt 50 Wahlvorgänge im Fall der Binomialverteilung und in dem hypergeometrischen Fall jeweils die Wahrscheinlichkeiten für k weiße Kugeln unter den 50 betrachteten zeigen.
- Interpretieren Sie die Unterschiede.

4. Fertigen Sie ein zweites Diagramm an, in dem für beide Verteilungen immer die Änderung der Wahrscheinlichkeit dargestellt wird, wenn von k zu k+1 gegangen wird.

5. Sie können hier die Binomialverteilung durch eine Normalverteilungsnäherung ersetzen.

- Bestimmen Sie die hier für die Normalverteilung anzusetzenden Parameter und begründen Sie formal, warum die Normalverteilungsnäherung gestattet ist.
- Bestimmen Sie die Steigung der Tangente an die Normalverteilungs-Funktion φ an der Stelle k = 25.
- Vergleichen Sie dieses Resultat mit dem entsprechenden Wert der Binomialverteilung, den Sie in der letzten Teilaufgabe gewonnen haben. Bewerten Sie die Zahlen.

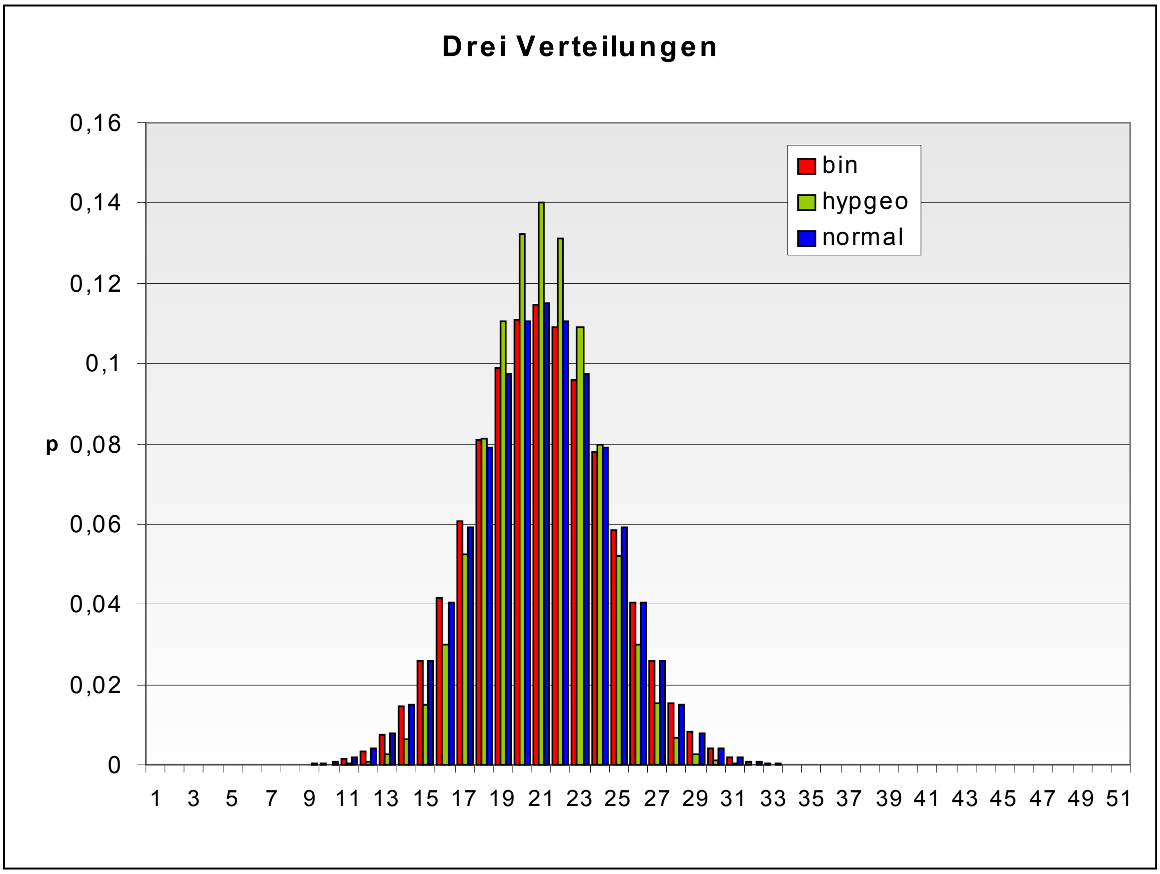
Lösungen

1. Hier wird ein kurzes, wiederholendes Eingehen auf die beiden Urnenmodelle erwartet:

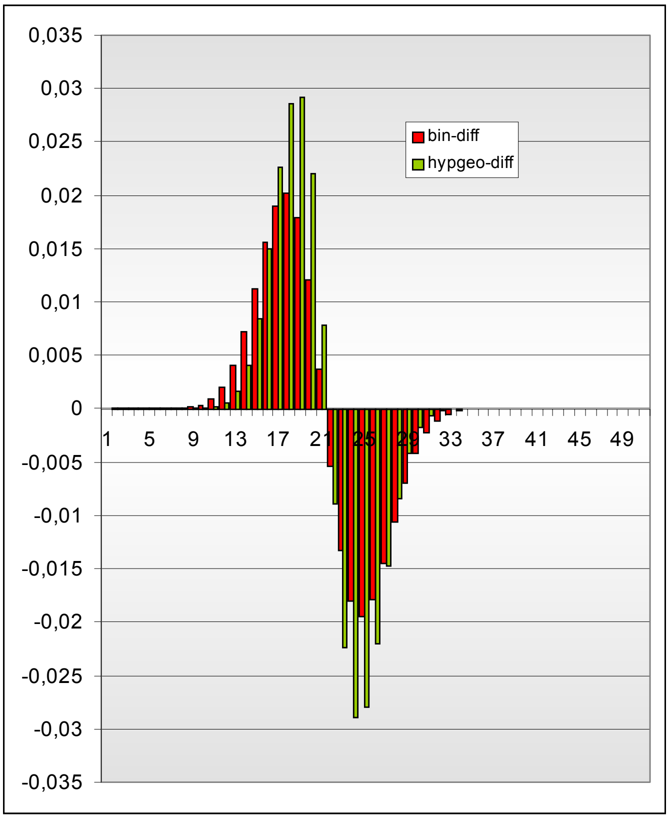
- (Niveau I) Urnenmodell mit Zurücklegen $\rightarrow$ keine Veränderung der anfänglichen Häufigkeiten $\rightarrow$ damit keine Änderung der Wahrscheinlichkeit für die beiden Ausgänge $\rightarrow$ Binomialverteilung;
- (Niveau I) Urnenmodell ohne Zurücklegen $\rightarrow$ mit jedem Herausnehmen ändert sich der Inhalt $\rightarrow$ damit ändert sich die Wahrscheinlichkeit für beide Ausgänge $\rightarrow$ Hypergeometrische Verteilung.
- Die Ausformung der Urnenmodell ergibt
- (Niveau II) binomiale Verteilungswahrscheinlichkeit = <Anzahl der Möglichkeiten der Realisierung des Resultats> * <Wahrscheinlichkeit für ersten Ausgang hoch Anzahl des Herauskommens des ersten Ausgangs> * <Wahrscheinlichkeit für zweiten Ausgang hoch Anzahl des Herauskommens des zweiten Ausgangs>, also (Niveau I)
  $$bin(n,k,p)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \;;$$
- (Niveau II) hypergeometrische Verteilungswahrscheinlichkeit = <Anzahl der Möglichkeiten, n Kugeln unter den N Kugeln der ersten Sorte zu ziehen> * <Anzahl der Möglichkeiten, k Kugeln unter den K Kugeln der zweiten Sorte zu ziehen> / <Anzahl der Möglichkeiten, n + k Kugeln aus N + K vorhandenen Kugeln zu ziehen>, also (Niveau I)
  $$hypgeo(n,k,N,K)=\frac{\binom{K}{k}\binom{N}{n}}{\binom{N+K}{n+k}} \;.$$
- (Niveau II) Je größer bei der hypergeometrischen Verteilung bei festgehaltenem n+k N und K werden, desto weniger ändern sich die Wahrscheinlichkeiten für jedes weitere Hineingreifen. Im Grenzfall ändert das Herausholen einer Kugel die Wahrscheinlichkeit nicht mehr, eine andere Kugel dieser Sorte im nächsten Griff zu finden. Dies ist aber genau die Situation des Urnenmodells, das zur Binomialverteilung führt.

2. (Niveau I) Mit den angegebenen Formeln ergibt sich
   $hypgeo(4,6,60,90)=0.25959$ und
   $bin(10,4,0.4)=0.25082$.
   Diese Werte lassen sich sinnvollerweise durch EXCEL-Einsatz errechnen.
   Kommentar: Ersichtlich liegt hier schon der Fall vor, dass sich die Ergebnisse nicht mehr wesentlich unterscheiden.

3. (Niveau II) Das Diagramm könnte so aussehen wie das auf der nächsten Seite abgebildete.
   (Niveau I) Ersichtlich haben die beiden Verteilungen zwar ein sehr ähnliches Bild und auch dasselbe Maximal-k (denselben Erwartungswert), aber:
   (Niveau I) Die hypergeometrische Verteilung ist enger und deswegen steiler – (Niveau III) wenn man vom Erwartungswert weggeht, spielt die „Ausschöpfung" der Vorräte eine größere Rolle; die Wahrscheinlichkeit für diese Ereignisse muss also kleiner sein als die zugehörige Binomialwahrscheinlichkeit.



4. (Niveau II) Das geforderte Diagramm ist nebenstehend zu sehen. (Die Interpretation aus Aufgabenteil 3 lässt sich auch hier nachverfolgen.)



5. (Niveau II) Die Normalverteilung ist die kontinuierliche Erweiterung zur Binomialverteilung. Also sind deren Mittelwert und Standardabweichung zu übernehmen:
$E = np = 20;\ \sigma = \sqrt{E(1-p)} = 3.46410$

(Niveau II) Sie kann verwendet werden, wenn die Varianz der Binomialverteilung über 9 liegt – was hier mit *Var* = 12 erfüllt ist.

(Niveau III) Um die geforderte Steigung zu errechnen, muss die Normalverteilungs-Funktion abgeleitet werden:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{\frac{-(x-E)^2}{2\sigma^2}}$$ ergibt

$$\varphi'(x) = \varphi(x) \cdot \left(\frac{-2}{2\sigma^2}(x-E) \right)$$

Da EXCEL die Normalverteilungswerte zur Verfügung stellt, lässt sich dieser Wert leicht bestimmen: $\varphi'(25) = -0.01693$. (Niveau II) Den entsprechenden Wert für die Binomialverteilung erhält man ebenso leicht aus den Werten der Tabelle (am besten ist es, das

Mittel der Änderungen von k=24 auf k=25 und von k=25 auf k=26 zu nehmen). Es ergibt sich $m = -0.01621$,

also ein Steigungswert, der vom entsprechenden Wert der Steigung der Normalverteilung um weniger als 5% abweicht. Nicht nur von den Werten, sondern auch von der Änderung der Werte nähert also hier die Normalverteilung die Binomialverteilung sehr gut. (Bemerkung: In das erste Diagramm sind auch noch die Werte für die Binomialverteilung mit eingetragen.)

Unterrichtsgang

Ausgehend von einer kombinatorischen Einführung in die Stochastik geht es im 3. Semester um den Anwendungsaspekt. Hauptthema sind dabei Prozesse, die argumentativ binomial oder hypergeometrisch modelliert werden können, insbesondere dann Messfehler.
Methodisch werden die Möglichkeiten des Tabellenkalkulationsprogramms EXCEL verwendet, das nicht nur einfach mit Listen (also Verteilungen) und mit daraus erstellbaren Graphiken zu arbeiten erlaubt, sondern eine für die Zwecke des Kurses mehr als ausreichende Zahl von statistischen Funktionen zur Verfügung stellt. Der Unterricht hat folgende Schwerpunkte:

Schwerpunkt Urnenmodelle und Verteilungen
- Verteilungen allgemein
- Binomialverteilung
- Hypergeometrische Verteilung
- Polynomialverteilung und mehrdimensionale hypergeometrische Verteilung
- Einbettung dieser Verteilungen in eine kontinuierliche Verteilung:
- Normalverteilung, auch als Funktion
- Messfehler
- Mittelwert und Varianz der Verteilungen

Schwerpunkt Umgang mit EXCEL
- Feste und variable Zellennamen
- Spaltenkommandos (drag und drop)
- Arbeiten mit den statistischen Funktionen
- Graphische Darstellungen
- Arbeiten mit verschiedenen Verteilungen (Binomialverteilung, Normalverteilung; Normalverteilung); Vergleiche der Werte

Die Verwendung von EXCEL ermöglicht es, auf Tabellenwerke zu verzichten.

14. Beispiel – Grundkurs – Bereich Verbindung Stochastik &Analysis

Arbeiten mit einer Sterbetafel

Ihnen ist eine Sterbetafel (Österreich 1992) in Form eines EXCEL-Files gegeben.

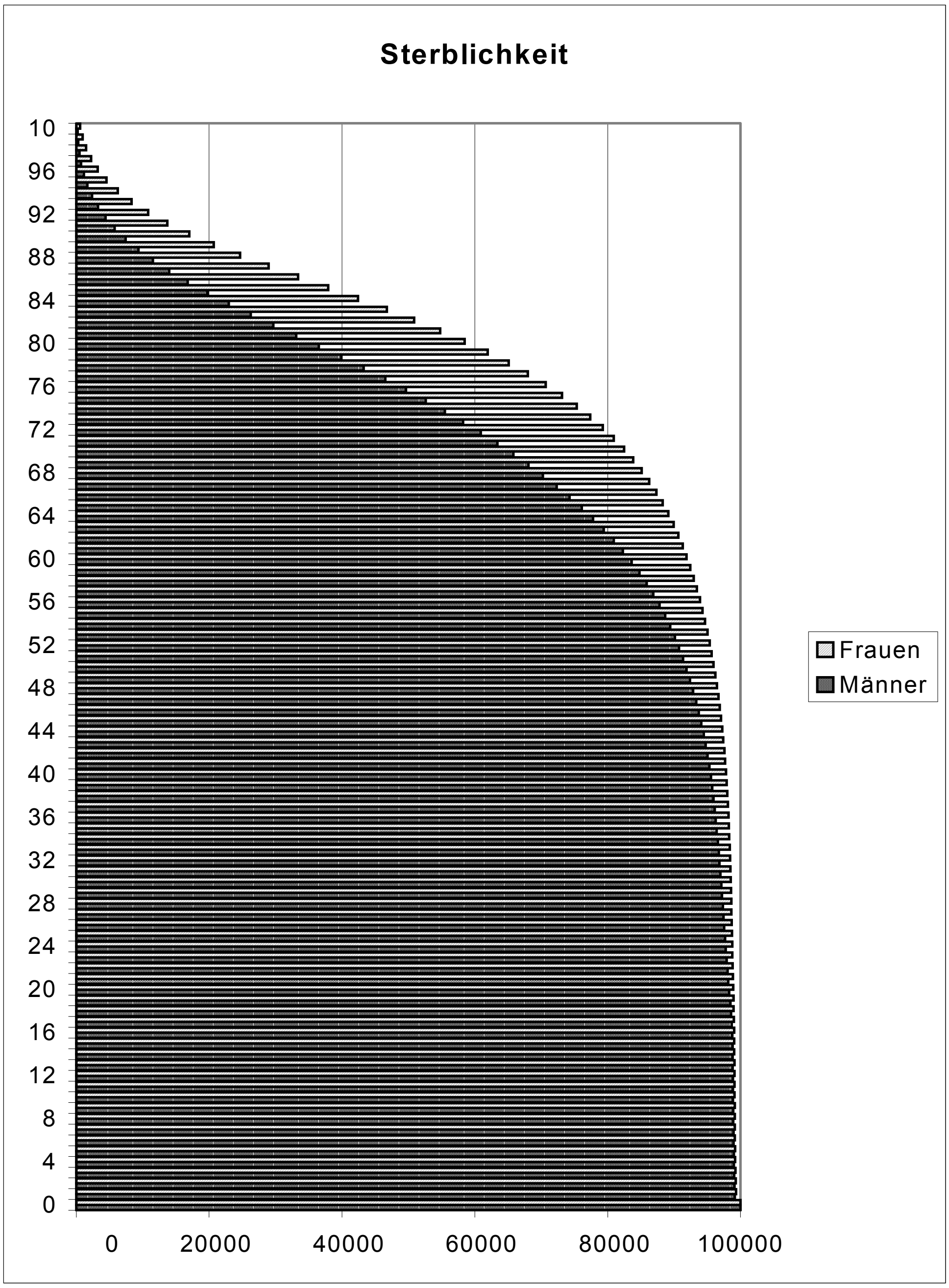
1. Erklären Sie, was die Werte aussagen! Gehen Sie dabei auch auf den Unterschied zwischen einer Sterbetafel und einer Alterspyramide ein.

Von nun an sollen Sie mit dem Ihnen wohlbekannten Programm EXCEL arbeiten. Bedenken Sie dabei, dass sie erläutern sollen, was Sie vorhaben und wie Sie dies in EXCEL umsetzen.

2. Machen Sie aus den Werten eine aussagekräftige Graphik, die insbesondere die Unterschiede zwischen Männern und Frauen verdeutlicht!
3. Bestimmen Sie mit Hilfe von EXCEL die mittlere Lebenserwartung (LE) für Männer und für Frauen!
4. Der Beginn des Rentenalters ist offiziell mit 65. Welche mittlere LE haben Männer in diesem Alter? Welche Frauen?
5. Fertigen Sie ein Diagramm der „Sterbewahrscheinlichkeit im nächsten Jahr" für beide Geschlechter an. Vorschlag: Nehmen Sie für die Wahrscheinlichkeitsachse einen logarithmischen Maßstab.
6. In welchem Alter ist bei Männern unter 30 die Wahrscheinlichkeit am größten, das nächste Lebensjahr nicht mehr zu erleben? In welchem Lebensalter erreicht das jährliche Sterberisiko wieder diesen Wert?
7. Bestimmen Sie den Altersbereich um die mittlere LE, der in beide Richtungen eine Standardabweichung umfasst. Welche Sterbewahrscheinlichkeit (!) tritt insgesamt in diesem Lebensabschnitt auf? Nehmen Sie zu dieser Zahl Stellung.
8. Die Sterbetafel ist ja eine diskrete Verteilungsfunktion. Nun könnte man ja dafür auch eine kontinuierliche Verteilung angeben. Grundsätzlich: Wie bestimmt man bei einer kontinuierlichen Verteilung Mittelwert und Standardabweichung?

Lösungen

1. Hier wird eine kurze (und wiederholende) Erörterung erwartet, dass eine Alterspyramide die Verteilung der Bevölkerung (meist nach Frauen und Männern getrennt) nach dem Lebensalter zu einem gewissen Zeitpunkt ist, also eine rein deskriptive Verteilung darstellt. Eine Sterbetafel hingegen entsteht aus der Beobachtung der Todesraten über einen gewissen Zeitraum und bildet dann eine prognostische Beschreibung der zu erwartenden Lebensalter der lebenden Personen.



2. Die geforderte Graphik könnte so aussehen wie oben angegeben.

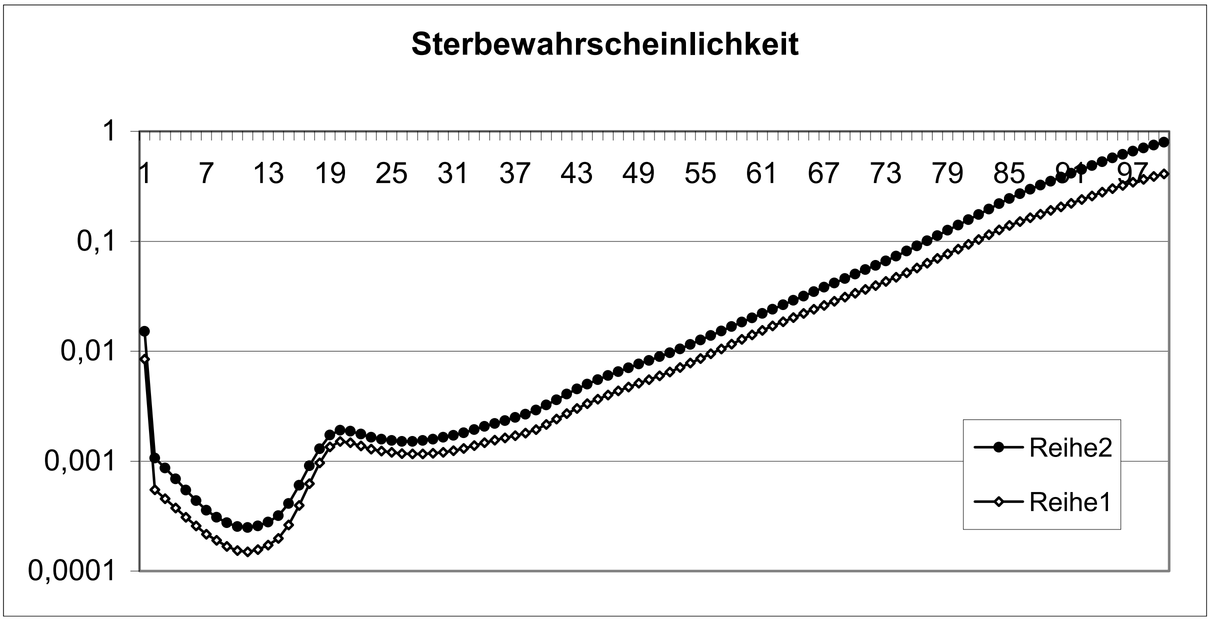
3. Der Mittelwert als Moment 1. Ordnung kann bestimmt werden über $\mu = \sum_i \frac{h_i}{n} X_i$.

   Hierbei sind die h_i die Zahl der Menschen, die im i-ten Jahr sterben, X_i ist dann i+0.5, n ist 100000.

Diese Rechnung lässt sich leicht in einer EXCEL-Spalte durchführen (Kommando F_i=(B_{i+1}-B_i)*(A_i+0,5) für die Männer, mit C für die Frauen). Die Spalte wird dann aufsummiert und durch 100000 geteilt.
Das Resultat ist: Mittlere LE für Männer 72.31 Jahre, für Frauen 78.47 Jahre.

4. Diese Rechnung erfolgt analog in einer EXCEL-Spalte ab dem Alter von 65 (Kommando H_i = (B_{i+1}-B_i)*(A_i+65,5) für die Männer, mit C für die Frauen). Weiter wie eben ergibt: Mittlere Lebenserwartung ab Rentenalter für Männer noch 14.46 Jahre, für Frauen noch 17.77 Jahre.

5. Hier lautet das Spaltenkommando D_i = (B_{i+1}-B_i)/B_i für die Männer, mit C für die Frauen. Das Resultat als Diagramm könnte so aussehen:



Man sieht, dass die Männer zeit ihres Lebens eine höhere jährliche Sterbewahrscheinlichkeit (StW) haben, dass im logarithmischen Maßstab die StW etwa ab einem Alter von 35 Jahren praktisch linear steigt (also tatsächlich exponentiell) und dass für beide Geschlechter um das Alter der Volljährigkeit herum ein relatives Lebensrisiko besteht.

6. Aus dem Datenfile ist leicht abzulesen, dass im Alter von 19 die Männer ein lokales Maximum der StW mit 1.5 Promille haben und dass dieser Wert erst wieder im Alter von 35 Jahren überschritten wird.

7. Zunächst einmal kann die Varianz als Moment 2. Ordnung berechnet werden:
$Var = \sum_i (X_i - \mu)^2 \cdot \frac{h_i}{n}$, wieder mit den oben eingeführten Größen ergibt sich das Excel-Spaltenkommando (B_i-B_{i+1})*(μ+0,5-A_i)^2 für Männer und mit C für Frauen.
Die Wurzel aus der Varianz ist die Standardabweichung; es ergibt sich
σ_M = 16.27 Jahre und σ_F = 15.38 Jahre.
(Hierbei ist das Lebensalter 100 in der Summation nicht berücksichtigt worden.)
Die Sterbewahrscheinlichkeit ist dann einfach (Zahl der Lebenden am Anfang des Intervalls – Zahl der Lebenden am Ende des Intervalls) / (Zahl der Lebenden am Anfang)
Es ergibt sich:
Im Bereich $\mu \pm \sigma$ ist die StW für Männer 89.3 %, für Frauen 90.3 %.
Kommentare:

- Wiederum sollte die StW nicht mit einer Wahrscheinlichkeit auf der Menge der Lebensalter verwechselt werden, die über die 100 Jahre summiert 1 ergibt. Deswegen kommt hier auch nicht ein Wert in der Gegend 68% heraus.
- Obwohl der betrachtete Zeitbereich für die Frauen kürzer ist, ist ihre StW in diesem Zeitintervall eher etwas höher. Das liegt daran, dass sie im Schnitt länger leben und dass ihre Überlebenskurve schließlich steiler ist (siehe 2.).

8. Hier wird – zum Schluss – wieder eine wiederholende Darstellung erwartet.
   Sei $\varphi(x)$ eine kontinuierliche Verteilungsfunktion. Dann sind der Mittelwert μ und die Standardabweichung σ definiert durch $\mu = \int_{Bereich} x\varphi(x)dx$ und $\sigma = \sqrt{\int_{Bereich} (x-\mu)^2\varphi(x)dx}$.

Bemerkungen

- Die Quelle für die hier verwendeten Werte ist zu beziehen über www.oestat.gv.at/fachbereich_03/bevoelkerung_tafeln.htm.
- Die dort angebotene Tafel (im EXCEL-Format) enthält noch weitere, interessante Kolumnen, die für die hier angebotene Aufgabe allerdings nicht vorgesehen ist (das hier verwendete EXCEL-File ist also ein Exzerpt der angegebenen Tafel).
- EXCEL stellt auch Mittelwert- und Standardabweichungs-Routinen zur Verfügung. Selbstverständlich können diese ebenso zur Lösung eingesetzt werden; allerdings müssen dazu ebenfalls die Daten aufbereitet werden. Insofern scheint der Vorteil eher gering.

Unterrichtsgang

Ausgehend von einer kombinatorischen Einführung in die Stochastik ging es im 3. Semester um den Anwendungsaspekt. Hauptthema war dabei Bevölkerungsstatistik.
Methodisch wurden die Möglichkeiten des Tabellenkalkulationsprogramms EXCEL verwendet, das nicht nur einfach mit Listen (also Verteilungen) und mit daraus erstellbaren Graphiken zu arbeiten erlaubt, sondern eine für die Zwecke des Kurses mehr als ausreichende Zahl von statistischen Funktionen zur Verfügung stellt. Der Unterricht hatte folgende Schwerpunkte:

Schwerpunkt Verteilung und statistische Maße
- Verteilungen allgemein
- diskrete und kontinuierliche Verteilung (Wahrscheinlichkeit und W'dichte)
- Binomialverteilung
- Normalverteilung
- Poissonverteilung
- Mittelwert und Varianz als erstes und zweites Moment

Schwerpunkt Umgang mit EXCEL
- Feste und variable Zellennamen
- Spaltenkommandos (drag und drop)
- Arbeiten mit den statistischen Funktionen
- Graphische Darstellungen
- Mittelwert und Standardabweichung von in Files gegebenen Verteilungen bestimmen, Verteilungen sinnvoll darstellen

- Vergleiche verschiedener Verteilungen (Binomialverteilung, Normalverteilung; Poisson-verteilung)

Schwerpunkt Bevölkerungs- und Versicherungsstatistik
- Problemstellung (Beschreibung und Prognose)
- Alterspyramiden (Stat. Bundesamt)
- Sterbetafeln (bezogen über Universität Kiel verwendet (http://www.uni-kiel.de/medinfo/fol_biom; hier auch Anfrage an das Bundesamt für das Versicherungs- und Bauspargewerbe möglich)

15. Beispiel – Grundkurs – Verbindung und Vertiefung von Stochastik und Analysis

---

Ist eine experimentelle Verteilung normalverteilt?

Während einer nächtlichen Autobahnfahrt mit konstanter Geschwindigkeit zählte ein Fahrer zwei Stunden lang Minute für Minute die Zahl der entgegenkommenden Fahrzeuge.
Es ergaben sich folgende Werte für die Verteilung der Zahl der entgegenkommenden Fahr zeuge pro Minute :

X: Zahl der Fahrzeuge pro Minute	Häufigkeiten
0	1
1	0
2	5
3	10
4	9
5	18
6	25
7	15
8	20
9	10
10	5
11	0
12	2
13 und mehr	0

Sei X die Zahl der entgegenkommenden Fahrzeuge pro Minute.

1. Bestimmen Sie Mittelwert μ und Standardabweichung σ von X !

2. Nähern Sie die Verteilung durch eine Normalverteilung mit den gleichen Werten für μ und σ an.

3. Zeichnen Sie ein Histogramm mit beiden Verteilungen.

4. Warum ist es weniger sinnvoll, die beobachtete Verteilung durch eine Binomialverteilung nähern zu wollen?

5. Machen Sie einen Chi²-Test, wie gut die Normalverteilung die beobachtete Verteilung wiedergibt. Beschreiben Sie dabei kurz, wie Sie die Parameter für den Chi²-Test finden.

6. Was sagt ein Chi²-Test aus?

Material: Tabellen für Normalverteilungswerte und für die Chi²-Verteilung, jeweils aus dem Bronstein-Semendjajew

Lösungen

1. (Niveau I) Mit den üblichen und bekannten Definitionen ergibt sich $\mu = 6.20833$ und $\sigma = 2.22072$.

2. (Niveau I) Mit der bekannten linearen Transformation $z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$ lassen sich die Näherungswerte für die Normalverteilung aus der gegebenen Tabelle bestimmen; (Niveau II) die erwarteten Werte erhält man dann durch Multiplikation mit 120, der Summe aller $n(X_i)$:

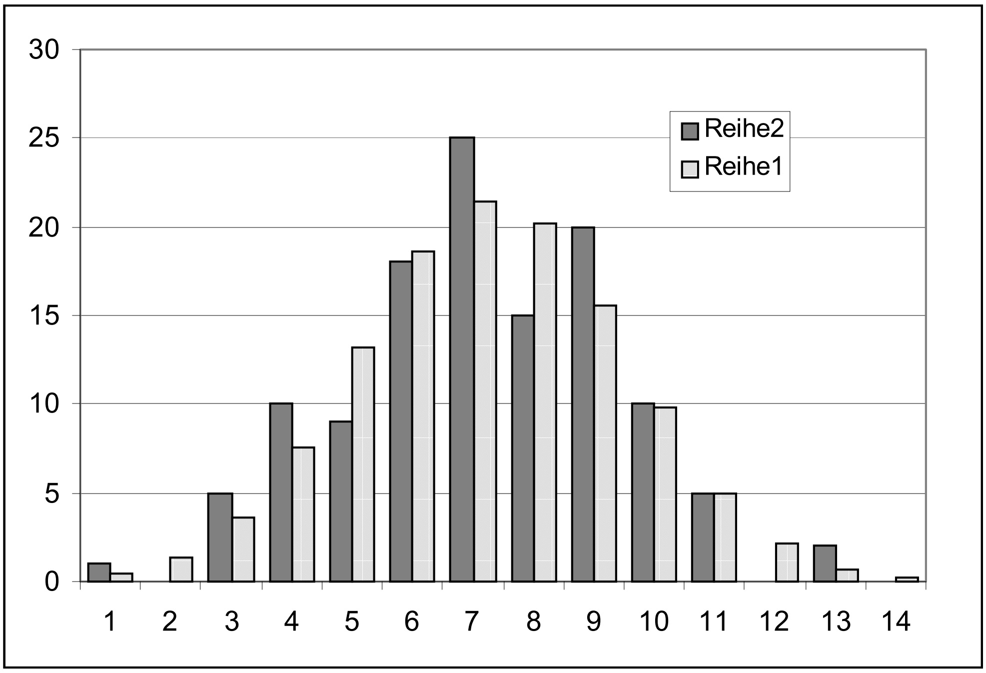
X_i	$n(X_i)$	$\varphi(z_i) \cdot 120$
0	1	0,43297321
1	0	1,37770975
2	5	3,57923966
3	10	7,59206943
4	9	13,148188
5	18	18,5912241
6	25	21,4628015
7	15	20,2302465
8	20	15,5686977
9	10	9,78227215
10	5	5,01837995
11	0	2,1019563
12	2	0,71882003
13	0	0,2007026

(Anmerkung: Die in dieser Tabelle wiedergegebenen Werte wurde – ebenso wie das folgende Histogramm – direkt in EXCEL erzeugt.)

3. (Niveau I) Das erwünschte Diagramm sollte etwa so wie das Diagramm auf der nächsten Seite aussehen. In diesem Diagramm ist „Reihe 1“ die Normalverteilungsnäherung, „Reihe 2“ die beobachtete Verteilung.

4. (Niveau III) Eine Binomialverteilung als Modellierung würde ein Experiment mit zwei Ausgängen voraussetzen, bei dem eine Durchführung (mehr oder minder) unabhängig von der vorherigen ist. Hier aber liegt ein ganz anderer Typ an Experiment vor, der als Elementarereignismenge ganze Zahlen zwischen 0 und einer nicht vorher bekannten Obergrenze ergibt. Es ist eher unsinnig, dieses Experiment auf eine Bernoulli-Kette zurückzuführen.

5. (Niveau I) Da 14 Klassen vorhanden sind, gibt es für den Chi²-Test 13 Freiheitsgrade.
(Niveau II) Die beim Chi²-Test zu bestimmende Größe t ist $t = \sum_{i=1}^{k} \frac{(h_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i}$, wobei die h_i die beobachteten Häufigkeiten sind, k – die Zahl der Klassen – hier den Wert 14 hat und schließlich – mit $n = 120$ – die np_i die oben angegebenen „theoretischen“ Werte aus der Normalverteilung sind.
Es ergibt sich $t = 12.56$.



(Niveau II) Aus der gegebenen Chi²-Tabelle liest man bei 13 Freiheitsgraden ab, dass die Grenze für die Ablehnung der Hypothese, die beobachtete Verteilung sei normalverteilt, bei einem Signifikanzniveau α von knapp 50% zu erfolgen hat. Die Übereinstimmung ist also nicht besonders gut.
(Anmerkung: Der genauere Wert für das Signifikanzniveau ist $\alpha = 0.482$.)

6. (Niveau II) Die Größe *t* des Chi²-Tests ist von ihrer Struktur her eine Varianzgröße. Genauer gesagt, gibt sie in jeder Komponente die mittlere quadratische Abweichung der beobachteten Verteilung von der „theoretischen", normiert an dem Wert der letzteren, an. Grundsätzlich prüft der Chi²-Test die Signifikanz der Hypothese der Übereinstimmung einer gegebenen Verteilung mit der Chi²-Verteilung. (Niveau III) Diese Verteilung ihrerseits misst die Abweichung von n unabhängigen, normalverteilten Zufallsgrößen. Je größer also *t* ist, desto mehr weichen die unabhängigen Zufallsgrößen von normalverteilten ab – oder, testmäßig einfacher formuliert, desto unwahrscheinlicher ist es, dass die theoretische Verteilung ein gutes Modell der beobachteten ist.

Bemerkungen

- Diese Aufgabe basiert auf einer Abituraufgabe des Jahrgangs 1988.
- Ersichtlich wird hier verstärkter Wert darauf gelegt, dass die Probanden den Hintergrund ihres Tuns hinreichend sinnvoll beschreiben können; die Rechnungen selbst sind nicht allzu schwer.
- Auch bei dieser Aufgabe bietet es sich an, die Rechnungen in EXCEL durchführen zu lassen. Mit der Funktion CHITEST bietet EXCEL auch sofort ein Wahrscheinlichkeits-Ergebnis für den Chi²-Test an. Dann allerdings ist es um so wichtiger, eine Darstellung zu verlangen, wie dieser Wert erhalten wird, m.a.W., was eigentlich bei einem Chi²-Test geprüft wird und wie er abläuft.

Unterrichtsgang

Das Verbindungs- und Vertiefungssemester Stochastik hatte das Generalthema *Verteilungen*, und zwar tatsächliche („beobachtete") Verteilungen, „theoretische" Verteilungen und die Frage, wie man Verteilungen vergleichen kann.

Aufbauend auf dem 2. Semester, in dem die Binomialverteilung, die hypergeometrische Verteilung sowie ihre „mehrdimensionalen" Verallgemeinerungen Thema war, lag der **Schwerpunkt bei den „theoretischen" Verteilungen bei der Normalverteilung.**
Unterpunkte:
- Begriffstrennung diskrete – kontinuierliche Verteilung; Wahrscheinlichkeit und W'dichtefunktion
- Wiederholung Mittelwert - Standardabweichung
- Anpassung anderer normalverteilter Verteilungen an die Standard-Normalverteilung; Arbeiten mit den entsprechenden Tabellen
- Normalverteilung als Fehlerverteilung
- Mehrdimensionale Normalverteilungen (am Beispiel Fehlerfortpflanzung)

Schwerpunkt „beobachtete" Verteilungen und Modellierung
- Unterscheidung Mittelwert – Erwartungswert
- Idee der Modellierung: A-priori-Wissen und a-posteriori-Anpassung

Schwerpunkt Verteilungs-Vergleich
- Fragestellung: Wie kann man die Güte der Modellierung messen, wenn kein a-priori-Wissen zur Verfügung steht?
- Die Überlegungen, die zur Chi²-Verteilung und zum Chi²-Test als einem sinnvollen und allgemein eingesetzten Werkzeug zur Beurteilung zur Übereinstimmung von Verteilungen führten, wurden an Buchstabenhäufigkeiten (in verschiedenen Texten und in verschiedenen Sprachen) entwickelt – siehe z.B. als Einsteig E.A.Poe, Der Goldkäfer.
- (Anmerkung: Hier wurde kurz auf Begriffe wie Informationsgehalt und Redundanz einer Nachricht eingegangen.)
- Der Begriff der Signifikanz als (wahrscheinlichkeitsartiges) Gütemaß
- Arbeiten mit der Chi²-Verteilung

Für einen Leistungskurs böte sich hier die Ausweitung auf den Vergleich kontinuierlicher Verteilungen an. Dies führte zwanglos zu der – vor allem in Physik und Technik – sehr wichtigen Idee der Autokorrelationsfunktion.

16. Beispiel - Leistungskurs – Verbindung Stochastik & Analysis

---

Untersuchung einer Verteilungsfunktion

Gegeben ist die Funktion $\varphi(x) = const \cdot x^2 \cdot e^{-x}$ mit $x \in \mathbf{R}^+_0$.

Welche Eigenschaften muss eine reellwertige Funktion aufweisen, um eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF) darzustellen ?
Sie wissen, dass eine WDF auch als (Wahrscheinlichkeits-) Verteilung bezeichnet wird.

Zeigen Sie, dass φ bei geeigneter Wahl der Konstante *const* diese Eigenschaften erfüllt. Geben Sie dieses geeignete *const* an.

Bestimmen Sie den wahrscheinlichsten Wert x_w der Verteilung (oder WDF).

Nun geht es um mittlere Werte der Verteilung.

- Bestimmen Sie den Mittelwert μ der Verteilung.
- Fertigen Sie eine hinreichend gute Skizze von φ an, in der Sie dann auch die Stellen x_w und μ eintragen.
- Wo wird sich der Median x_M der Verteilung etwa befinden ? Schätzen Sie dies aus Ihrer Skizze. (Sollten Sie den Median berechnen, soll es Ihr Schade nicht sein.)
- Welche Wahrscheinlichkeit kommt bei dieser WDF dem Bereich zwischen wahrscheinlichster Stelle und Mittelwert zu ? Geben Sie zu diesem Wert auch noch einen kurzen Kommentar.

Wagen wir einmal eine physikalische Interpretation dieser WDF :

- x sei ein Energiemaß von Teilchen in einem Fluid, und die Energie von Teilchen in diesem Fluid sei $\tilde{\varphi}$-verteilt. Hat ein Teilchen eine Energie, die größer als eine Grenzenergie x_G ist, so kann es aus dem Fluid entweichen (sofern es nahe genug der Oberfläche ist). Man kann nun mit Hilfe physikalischer Theorien berechnen, dass das Fluid stabil ist, wenn nicht mehr als 0.1 % aller Teilchen eine Energie oberhalb von x_G aufweisen.
  Für welchen Bereich an Werten von x_G , verglichen mit der mittleren Energie, ist das Fluid stabil ?
- Wenn die Temperatur sich verdoppelt, so verdoppelt sich auch die mittlere Energie der Teilchen. Was ändert die bezüglich der Stabilität?

Lösungen

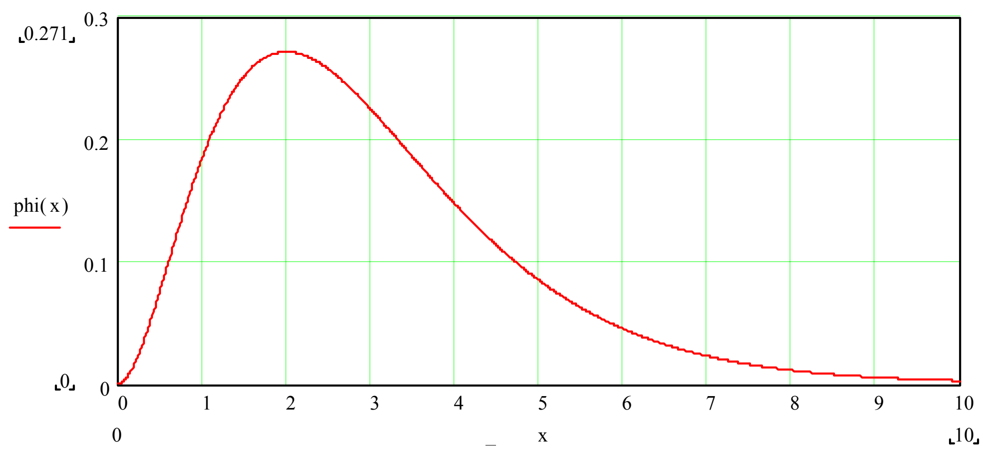
1. (Niveau I) WDF müssen
   - positiv definiert sein,
   - für ganz R (bzw. für ganz R^+) definiert sein,
   - an offenen Grenzen ein uneigentliches bestimmtes Integral besitzen,
   - normiert sein - d.h. ihr Integral über den Definitionsbereich muss den Wert 1 haben.

2. (Niveau I) f erfüllt leicht ersichtlich die ersten drei Bedingungen, und da (Niveau II) eine Stammfunktion zu f die Funktion
   $\Phi(x) = (-x^2 - 2x - 2)e^{-x}$
   ist (Anwendung partieller Integration), erhält man
   $$\int_0^\infty \varphi(x)dx = \left[(-x^2 - 2x - 2)e^{-x}\right]_0^\infty = 2$$
   Damit ergibt sich die Konstante zu 0.5 .

3. (Niveau I) Der wahrscheinlichste Wert einer WDF ist der Wert an der Stelle, an der die WDF maximal wird. Dazu wird die Ableitung benötigt :
   $\varphi'(x) = 0.5(-x^2 + 2x)e^{-x}$.
   Mit dem üblichen Vorgehen erhält man x = 0 als Minimalstelle und x = 2 als Maximal-stelle. (Niveau II) Da nur eine Maximalstelle existiert, gibt es auch den wahrscheinlichsten Wert, der bei $x_W = 2$ den Dichte-Wert 0.270671 aufweist.

4. (Niveau I) Der Mittelwert μ ergibt sich aus der Bedingung
   $$\mu = \int_0^\infty x\varphi(x)dx \ .$$
   Damit (Niveau II) (wiederum Anw. partieller Integration und des Ergebnisses aus 3.) :
   $$\mu = \left[0.5(-x^3 - 3x^2 - 6x - 6)e^{-x}\right]_0^\infty = 3$$

   Funktionsdarstellung :



(Niveau I) Der Median einer WDF ist die Stelle, bis zu der das bestimmte Integral den Wert 0.5 aufweist. (Niveau II) Der Verlauf der WDF lässt erkennen, dass der Median zwischen x_W und μ liegt, und zwar eher auf der Seite von μ.
Die (nicht geforderte) Berechnung des Medians wäre insgesamt Niveau III :

Also hier : $\int_0^{med} \varphi(x)dx = 0.5 \Leftrightarrow (-med^2 - 2med - 2)e^{-med} + 2 = 1$.

Die daraus entstehende Nullstellengleichung $(-med^2 - 2med - 2)e^{-med} + 1 = 0$
kann sinnvollerweise mit Hilfe des Newton-Verfahrens gelöst werden - es ergibt sich med = 2.6740603

Wahrscheinlichkeit - (Niveau II) Hier ist gefragt nach

$$p = \int_2^3 \varphi(x)dx = \left[0.5(-x^2 - 2x - 2)e^{-x}\right]_2^3 \quad .$$

Der Wert ergibt sich zu p = 0.253486 .
Kommentar (Niveau III) : Der wahrscheinlichste Wert liegt deutlich unter dem Mittelwert, so dass sich zwischen x_w und Mittelwert etwa ein Viertel aller Teilchen (siehe voriges Ergebnis) aufhalten. Damit muss auch die Standardabweichung deutlich größer sein als dieser Abstand zwischen x_w und Mittelwert.

5. (Niveau III) Die Schwierigkeit dieses Aufgabenteils liegt in der Interpretation der Aufgabenaussage. Diese Aussage lässt sich zu der Gleichung (bekannter Form) verdichten (mit g als Grenzenergie, allerdings ist g noch nicht in Einheiten der mittleren Energie gesetzt):

   $$\int_0^g \varphi(x)dx = 0.999 \quad .$$

   Hier ergibt sich - wieder mit der Newton-Formel - g = 11.229 .
   Da die mittlere Energie in diesem Maßstab bei x = 3 sitzt, bedeutet dies, dass die Grenzenergie nicht weniger als das 3.74 - fache der mittleren Energie sein darf, um das Fluid stabil zu lassen.

Bemerkungen

- Diese Aufgabe entstammt dem Abiturjahrgang 1999.
- Der Fragekomplex um die mittleren Werte enthält hier nicht die Standardabweichung. Sie zu bestimmen, ist nicht schwerer als die anderen mittleren Werte, erfordert aber etwas mehr Rechenaufwand. Dieser Aufgabenteil könnte andere ersetzen:

Bestimmen Sie nun die Standardabweichung □und geben Sie an, wie groß bei dieser Verteilung die Wahrscheinlichkeit im Bereich $\mu \pm \sigma$ ist.

Lösung
Standardabweichung - (Niveau II) Da die Standardabweichung im Wesentlichen der Mittelwert der zweiten Momente der WDF ist, wäre jetzt folgende Gleichung zu lösen :

$$\sigma = \sqrt{\int_0^\infty x^2\varphi(x)dx - \mu^2} \quad ,$$

sinnvollerweise wieder mit partieller Integration. (Niveau III) Der Wert für Sigma muss deutlich über 1 liegen, dem Abstand zwischen der Stelle des häufigsten Werts und dem Mittelwert, denn zwischen diesen beiden liegen nur etwa 25% an Wahrscheinlichkeit.
Tatsächlich ergibt sich $\sigma = \sqrt{3}$.

Unterrichtsgang

Im Ende des 2 . Semesters und am Beginn des 3. Semesters ging es um die Erweiterung des diskreten Wahrscheinlichkeitsbegriffs auf Wahrscheinlichkeitsdichten, insbesondere auf kontinuierliche WDF. Dabei wurden besonders betont :

- Definierende Eigenschaften für WDF
- Normierung
- Median, Mittelwert und Varianz als nulltes, erstes und zweites Moment der WDF
- Wiederholung von Integrationsmethoden
- Wiederholung von numerischen Methoden
- Anwendung von Reihen auf nicht direkt integrierbare WDF
- Als Beispiele dienten
- Kasten-, Dreiecks- und Dachverteilung (jeweils diskrete und kontinuierliche Version)
- $x \cdot e^{-x}$ - Verteilung
- Maxwell-Verteilung (allerdings eher qualitativ, da diese Funktion und ihre Momente nicht direkt integrierbar sind)
- Gauß-Verteilung

Mit dieser letzten Verteilung richtete sich der Unterrichtsgang wieder verstärkt auf statistische Fragen aus.
Anhand der Maxwell-Verteilung wurden physikalische Fragen zumindest angesprochen; Fragen analog zu Aufgabenteil 5 waren <u>nicht</u> Unterrichtsgegenstand.

17. Beispiel – Leistungskurs – Verbindung Stochastik & Analysis

Fermi-Dirac-Verteilung

Gegeben ist die reelle Funktionenschar $f_p : x \to f_p(x) = \frac{1}{1+e^{x/p}}$, $p \in R^+$.

1.1 Untersuchen Sie die Funktionenschar unter folgenden Aspekten:

- Aussehen des Graphen in Abhängigkeit von p (fertigen Sie dazu eine hinreichend gute Darstellung der Graphen einiger f_p an). Wie sieht insbesondere der Graph für sehr kleine p aus?
- Symmetrie
- Monotonie
- Verhalten bei x = 0
- Verhalten für $x \to -\infty$ und für $x \to \infty$

1.2 Geben Sie die Funktionsgleichung an für eine Funktionenschar, deren Graphen gegenüber denen von f_p um 1 (nach rechts) verschoben ist.

2.1 Zeigen Sie, dass $F_p : x \to F_p(x) = x - p \cdot \ln(1+e^{x/p})$ eine Stammfunktion zu f_p ist.

2.2 Beweisen Sie:

Für $p \to 0$ nähert sich das Integral $\int_{-1}^{0} f_p(x)dx$ dem Wert 1 und das Integral $\int_{0}^{1} f_p(x)dx$ dem Wert 0.

3. In der Physik tritt die Funktionenschar – mit einer Bedeutungsinterpretation der Parameter – als Fermi-Dirac-Verteilung auf:

$$f(E) = \frac{1}{1+\exp((E-\mu)/kT)}$$

Hierbei bedeuten
E die Energie der Teilchen (die grundsätzlich positiv ist)
μ die mittlere Energie
T die absolute Temperatur
k die Boltzmann-Konstante, also
kT die mittlere thermische Energie der Teilchen.

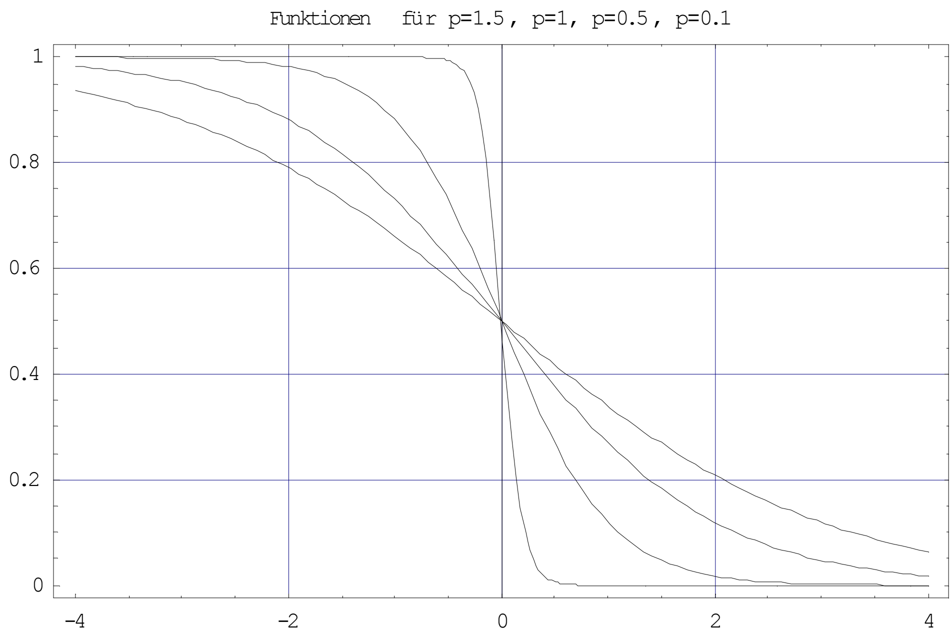
3.1 Verbinden Sie Ihre bisherigen Ergebnisse mit dieser Interpretation der Parameter!

3.2 Fertigen Sie den Graphen der Fermi-Dirac-Verteilung für μ = 1 und kT = 0.2 an!

3.3 Zeigen Sie, dass die Fläche unter dem Graphen endlich ist, dass also f wirklich eine Verteilungsfunktion darstellt.

Lösungen

1.1 (Niveau I) Hier sind die Graphen der Scharkurven für die Parameter-Werte 1.5; 1, 0.5; 0.1 gegeben:



- (Niveau II) Für $p \to 0$ geht der Graph von f_p gegen die Stufenfunktion mit dem Wert 1 für negative x und dem Wert 0 für positive x.
- (Niveau I) Die Scharfunktionen sind – wie die Graphik andeutet – für alle p punktsymmetrisch zu (0 | 0.5). (Niveau II) Dies kann gezeigt werden durch
$$f_p(x) + f_p(-x) = \frac{1}{1+\exp(x/p)} + \frac{1}{1+\exp(-x/p)} = \frac{1+\exp(x/p)+1+\exp(-x/p)}{(1+\exp(x/p))(1+\exp(-x/p))} = 1$$
- (Niveau I) Da $f_p'(x) = -\frac{\exp(x/p)}{p\cdot(1+\exp(x/p))^2}$ und sowohl p als auch die Ergebnisse der Exponentiation grundsätzlich positiv ist, ist die Ableitung aller Scharfunktionen grundsätzlich negativ. Sie fallen also alle streng monoton.
- (Niveau I) Bei x = 0 gilt $f_p(0) = \frac{1}{2}$.

  (Niveau I) Die Graphen lassen vermuten, dass weiterhin bei x = 0 ein Punkt mit minimaler Steigung (oder ein Wendepunkt von Rechtskrümmung nach Linkskrümmung) vorliegt.
  (Niveau II) Dies kann z.B. durch eine Argumentation mit der 2. Ableitung gezeigt werden:
  $$f_p''(x) = \frac{\exp(x/p)\cdot(\exp(x/p)-1)}{p^2\cdot(1+\exp(x/p))^3}$$
  Diese Funktion hat ersichtlich bei x = 0 eine steigende Durchgangsnullstelle.
- (Niveau II) Mit dem bekannten Verhalten der Exponentialfunktion für große und kleine x ergibt sich, dass für $x \to -\infty$ die Funktionswerte gegen 1 streben, für $x \to \infty$ dann gegen 0.

1.2 (Niveau II) Die verschobenen Funktionen haben die Gleichung

$$f_p(x) = \frac{1}{1+\exp[(x-1)/p]} \ .$$

2.1 (Niveau I) Einfaches Ableiten von F_p (unter Verwendung von Summen- und Kettenregel) liefert das gewünschte Resultat.

2.2 (Niveau II) Damit ergibt sich: $\int_{-1}^{0} f_p(x)dx = [0 - p\ln 2] - [-1 - p\ln(1+\exp(-1/p))]$

Für $p \to 0$ geht die erste Klammer gegen Null; dies gilt (bekannt aus dem Unterricht) ebenso für $p\ln(1+\exp(-1/p))$. Das Ergebnis ist also 1.

(Niveau II) Analog:

$$\int_0^1 f_p(x)dx = -[0 - p\ln 2] + [-1 - p\ln(1+\exp(1/p))]$$

Für $p \to 0$ konvergiert hier wieder die erste Klammer gegen Null; (Niveau III) die zweite Klammer nähert sich wegen

$$1 - p\ln(1+\exp(1/p)) \to 1 - p\ln(\exp(1/p)) = 1 - p/p = 0$$

der Null an. Das Ergebnis ist also 0.

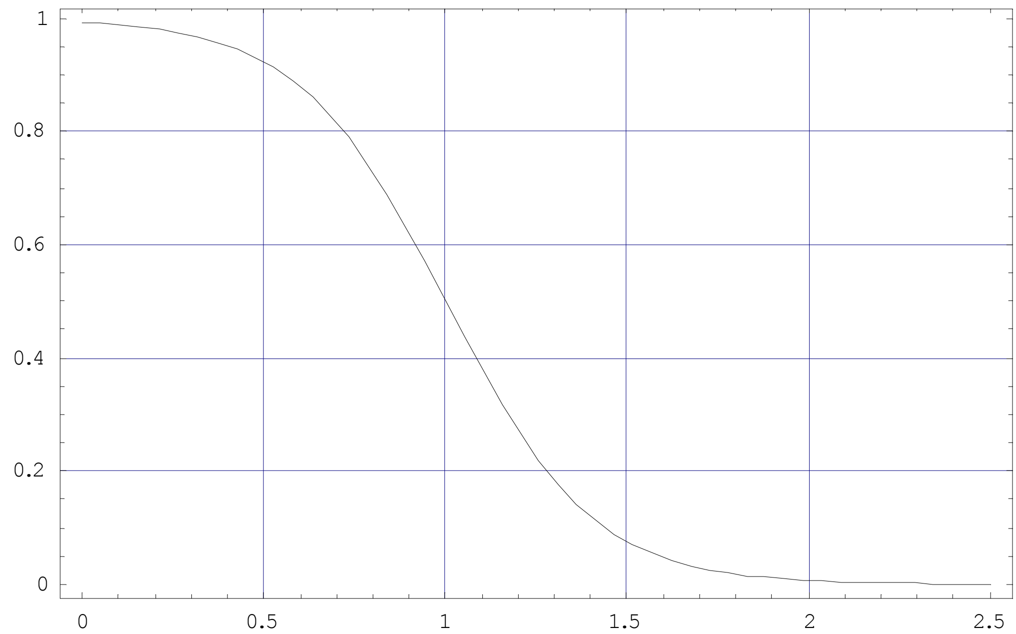
3.1 (Niveau II) Die Fermi-Dirac-Verteilung (FDV) ist ersichtlich eine Interpretation der verschobenen Funktionen der gegebenen Funktionenschar (siehe 1.2). Hierbei ist die Funktionalvariable x durch die Teilchenenergie interpretiert, der Scharparameter durch die thermische Energie, und die Verschiebung durch den Energie-Mittelwert.

- Als Energieverteilung ist die FDV allerdings nur für positive E definiert.

Die Interpretation der Ergebnisse aus 1.1 liefert:

- Mit steigender Energie nimmt die Verteilungsdichte ab, die Zahl der Teilchen fällt also stetig mit steigender Energie.
- Für jedes Teilchen unterhalb des Energie-Mittelwerts gibt es ein Teilchen im gleichen Energie-Abstand oberhalb des Mittelwerts.
- Je kleiner die Temperatur ist, desto mehr ähnelt die FDV der Kastenverteilung.
- (Niveau III) Für hohe Temperaturen ist die 1 im Nenner zu vernachlässigen (die FDV geht in die Boltzmann-Verteilung über)

3.2 (Niveau II) Der Graph ist auf der folgenden Seite dargestellt.



3.3 (Niveau II) Damit die hier gegebene FDV überhaupt eine Verteilungsfunktion ist, muss ihr Integral über den Definitionsbereich hinweg endlich sein. Es ist hier also zu untersuchen, ob für $x \to \infty$ das uneigentliche bestimmte Integral (UBI) existiert.
(Niveau III) Sinnvoll ist hierbei, wieder die unverschobene Funktion (sozusagen die FDV von x = 1 an) zu verwenden und sich der Resultate aus 2.2 zu bedienen:

$$\int_0^t f_p(x)dx = [t - p \cdot \ln(1 + \exp(t/p))] - [0 - p \ln 2]$$

Für festes p und $t \to \infty$ ergibt die zweite Klammer den Wert p ln 2, die erste Klammer mit derselben Argumentationsstruktur wie in 2.2 gegen Null (exp(t/p) wird hier wegen des wachsenden t immer größer, nicht, weil der Nenner immer kleiner wird).
Also existiert für die ursprüngliche Funktionenschar das erwünschte UBI, damit auch für die FDV; sein Wert oberhalb von μ ergibt sich zu kT ln2.
(Anmerkung: Es gilt

$$\int_0^\infty f(x)dx = \frac{kT}{\mu} \cdot \ln(1 + \exp(\mu / kT))\,;$$

dies liefert die Normierungskonstante für die FDV.)

Bemerkungen

- Diese Aufgabe beruht teilweise auf einer Abituraufgabe des Jahrgangs 1994, teilweise auf einer (davon unabhängigen) Abitur-Vorbereitungs-Klausur des Jahrgangs 1998.
- Der Anspruch der Aufgabe ist hauptsächlich das Zusammendenken der verschiedenen Eigenschaften und die anschließende Interpretation im physikalischen Kontext.
- Die gegebene Funktionenschar erfüllt die Differentialgleichung $f'' = \frac{(2f-1) \cdot f'}{p}$ mit den Randbedingungen $f(0) = \frac{1}{2};\ f'(0) = -\frac{1}{4p}$. Es ist möglich, die Ausrichtung der Aufgabe

auf die Tatsache zu richten, dass die Funktionenschar die Lösung dieser Differentialgleichung darstellt, und dafür die physikalische Interpretation wegfallen zu lassen.

Unterrichtsgang

Die Verbindung der Inhalte des 2 . Semesters (Statistik) und des 1. Semesters (Analysis) beruht auf der Arbeit mit Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen (WDF).
Ausgehend vom Begriff der diskreten Verteilungen geht es zunächst um die Erweiterung des diskreten Wahrscheinlichkeitsbegriffs auf kontinuierliche WDF. Dabei wird besonders betont:

- Definierende Eigenschaften für WDF
- Normierung
- Median, Mittelwert und Varianz als nulltes, erstes und zweites Moment der WDF
- Wiederholung von Integrationsmethoden
- Begriff des uneigentlichen bestimmten Integrals
- Wiederholung von numerischen Methoden

Die Beispiele für WDF kommen aus der Stochastik:

- Kasten-, Dreiecks- und Dachverteilung (jeweils diskrete und kontinuierliche Version)
- Gauß-Verteilung (hier richtet sich der Unterrichtsgang wieder verstärkt auf statistische Fragen aus)
- $x \cdot e^{-x}$ - Verteilung

und aus der Physik:

- Maxwell-Verteilung (allerdings eher qualitativ, da diese Funktion und ihre Momente nicht direkt integrierbar sind)
- Boltzmann-Verteilung
- Bei den WDF aus der Physik wird besonderes Gewicht auf den Zusammenhang zwischen Mathematik (liefert die Funktionen) und physikalischer Interpretation gelegt, insbesondere auf die Rolle der Energie als freier und als normierender Parameter.

Die nachfolgenden Aufgabenbeispiele wurden von Dr. Wolfgang Löding, IfL, geliefert:

Feldmäuse *LK*

Auf einem Kartoffelfeld wird eine zyklische Entwicklung einer Feldmäusepopulation beobachtet: In einem vierjährigen Zyklus vermehrt sich die Population zunächst innerhalb von 3 Jahren exponentiell von ihrem Anfangswert n_0 auf ihre Kapazitätsgrenze von k Mäusen pro Flächeneinheit, um dann – wie Untersuchungen erwiesen aufgrund der Überzuckerung des Blutes durch den Gedrängeschock – innerhalb eines Jahr linear wieder auf ihren Anfangswert zurückzugehen.

a) Bestimmen Sie die Entwicklungsfunktion für einen solchen Zyklus für beliebige natürliche Zahlen n_0 und k.

Zeigen Sie, dass für die durchschnittliche Anzahl von Mäusen pro Flächeneinheit innerhalb eines Zyklus gilt: $m(n_0,k)=\frac{k-n_0}{\ln k-\ln n_0}$.

Der Landwirt entschließt sich die Mäuse zu bekämpfen. Durch ökologisch verträgliche Bekämpfungsmaßnahmen während der Wachstumsphase kann zwar die relative Wachstumsrate der Population reduziert werden, nicht aber eine Abnahme der Population bewirkt werden. Während der Zusammenbruchsphase soll keine Bekämpfung stattfinden.

Zeigen Sie, dass eine Bekämpfung, die die gesamte Wachstumsphase anhält, keine Wirkung hat, d.h. dass die durchschnittliche Anzahl der Mäuse und somit der Ernteschaden während eines Zyklus unverändert bleibt.

Hinweis: Sollte Ihnen die allgemeine Lösung der Aufgabe a) nicht gelingen, so können Sie ersatzweise die Aufgabe unter Verwendung der Voraussetzungen aus Aufgabenteil b) bearbeiten.

b) Für diesen Aufgabenteil wird gesetzt: $n_0 = 50$, $k = 600$ und die Bekämpfung bewirke in der Wachstumsphase der Population eine Reduzierung der Wachstumsrate auf ein Drittel der natürlichen Wachstumsrate.

Entwickeln Sie ein optimales Konzept für die Bekämpfung der Mäuse, d.h. ein solches, in dem der Mittelwert der Populationsstärke minimal wird.

Zeigen Sie dazu zunächst, dass bei einer Bekämpfungsdauer von u Jahren der Entwicklungszyklus der Population auf einen Zeitraum von $z(u) = \frac{2u+9}{3} + 1$ Jahren anwächst.

Berechnen Sie dann den minimalen Mittelwert und vergleichen Sie ihn mit dem Mittelwert bei natürlicher Entwicklung der Population.

c) Zeichnen Sie zur Veranschaulichung die Graphen der Entwicklungsfunktion der Population bei natürlicher Entwicklung sowie bei optimaler Bekämpfung für einen Zeitraum von 8 Jahren.

Luftvolumen

GK
Analysis

Die Ableitung des Luftvolumens in der Lunge eines Menschen nach der Zeit kann mit medizinischen Messapparaturen graphisch dargestellt werden. Näherungsweise kann diese Ableitung bei einem bestimmten Patienten durch die Funktion f mit $f(t) = \frac{1}{2} \cdot \sin(\frac{2}{5}\pi\ t)$ modelliert werden.
(f(t) in Litern pro Sekunde; Zeit t in Sekunden).

a) Welche inhaltliche Bedeutung hat die Funktion F mit $F(t) = \int_0^t f(x)\ dx$?

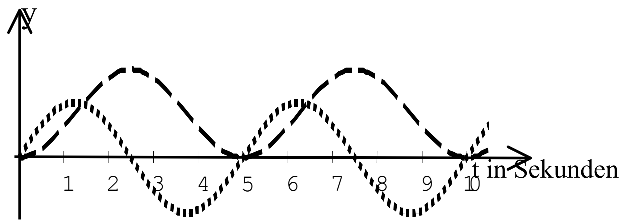
Zeigen Sie, dass $F(t) = \frac{5}{4\pi} \cdot [1 - \cos(\frac{2\pi}{5} t)]$ gilt.

b) Wir nehmen an, dass zur Zeit t = 0 keine Luft in der Lunge ist.
Das nebenstehende Diagramm zeigt den zeitlichen Verlauf des Luftvolumens in der Lunge und den zeitlichen Verlauf der momentanen Änderungsrate des Luftvolumens.

Welche der beiden Kurven beschreibt den zeitlichen Verlauf des Luftvolumens in der Lunge?

Bestimmen Sie das maximale und das minimale Luftvolumen in der Lunge.

Bestimmen Sie die Zeitpunkte, zu denen die Lunge jeweils die Hälfte des maximalen Luftvolumens enthält.



c) Wie groß ist die mittlere Änderungsrate des Luftvolumens während der Zeitintervalle [0 ; 2,5] , [2,5 ; 5] und [0 ; 5] ?

Wie groß ist das mittlere Luftvolumen in der Lunge während der Zeitintervalle [0 ; 2,5] , [2,5 ; 5] und [0 ; 5] ?

ANMERKUNGEN:

Zielsetzung:
Die Lösung der Aufgabe erfordert die Interpretation der Begriffe „Ableitung“ und „Integral“ unter den Aspekten „Änderungsrate“ und „Gesamtänderung“ im Kontext realitätsnaher Situationen. Sie hat hier einen hohen Stellenwert und gibt den Schülerinnen und Schülern Gelegenheit zu zeigen, wie weit und wie tief sie zentrale Begriffe der Analysis verstanden

haben.
Während in Teilaufgabe b) der Integralbegriff zur Beschreibung der Gesamtänderung (Wirkung) dient, muss er in c) als Mittelwert verstanden und angewendet werden.

Unterrichtliche Voraussetzungen:
Die Schüler und Schülerinnen sind es gewohnt, die Begriff „Ableitung“ und „Integral“ in realitätsnahen Situationen unter unterschiedlichen Aspekten anzuwenden. Sie sind sicher in der Handhabung des GTR und setzen ihn für numerische Berechnungen ein.

Zusätzliche Hilfsmittel: GTR

Vorgesehene Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Lösungsskizze, vorgesehene Bewertungseinheiten und ihre Zuordnungen zu den Anforderungsbereichen:

Flugbuchungen *GK*

Eine Fluggesellschaft verwendet Flugzeuge vom Typ „SPATZ“ für 50 Fluggäste und vom Typ „TAUBE“ für 100 Fluggäste. Der Typ „SPATZ“ wird auf der Kurzstrecke von Aburg nach Bfurt eingesetzt, der Typ „TAUBE“ auf der Langstrecke von Bfurt nach New World.

Die Fluggesellschaft ist sehr erfolgreich, denn die Belegungsstatistik weist über einen längeren Zeitraum aus, dass die Flüge auf diesen Strecken stets ausgebucht waren. Allerdings wurden auch im Mittel 10% der gebuchten Plätze kurzfristig storniert.

a) Unter welchen Annahmen ist es sinnvoll, für jeden bevorstehenden Flug die Anzahl der tatsächlich den Flug antretenden Passagiere als binomialverteilt anzusehen?

b) Es seien die Annahmen von a) erfüllt. Wie groß sind dann die Wahrscheinlichkeiten, dass beim nächsten Flug mit einem „SPATZ“
   - genau 42 Plätze
   - höchstens 42 Plätze
   - mindestens 39 Plätze

   tatsächlich genutzt werden?

c) Es seien die Annahmen von a) erfüllt. Um die Flugzeuge besser auszulasten, bietet die Fluggesellschaft den Reisebüros stets 8% mehr Plätze als verfügbar zum Verkauf an und geht damit das Risiko einer Überbuchung ein, d.h. dass bei einer zu geringen Anzahl von Stornierungen ein oder mehrere Fluggäste ihren Flug nicht antreten können. Wie groß ist für die beiden Flugstrecken jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass es zu einem solchen Konfliktfall kommt?

d) Es seien die Annahmen von a) erfüllt. Ein Passagier, der tatsächlich fliegt, bringt der Fluggesellschaft nach Abzug der Servicekosten eine Einnahme von 200 EURO, ein Fluggast, der storniert hat, bringt nur 100 EURO, ein Fluggast mit gebuchtem Ticket, der abgewiesen werden muss, bringt keinen Einnahmen, sondern verursacht für die Fluggesellschaft Kosten in Höhe von 500 EURO (Hotel- und Bewirtungskosten, Imageschaden usw.).
   Welche Überbuchungsquote für das Flugzeug „TAUBE“ ist für die Fluggesellschaft betriebswirtschaftlich am sinnvollsten?

<u>Zusatzteil für einen Leistungskurs:</u>
Eine weitere Flugstrecke, auf der der „SPATZ“ eingesetzt wird, hat nur eine statistisch ermittelte mittlere Buchungsquote von nur 90%. Unter welchen Annahmen ist es sinnvoll, für jeden bevorstehenden Flug die Anzahl der buchenden Passagiere auf dieser Linie als Poisson-verteilt anzusehen? Wie groß ist unter dieser Annahme die Wahrscheinlichkeit, dass ein Flug ausgebucht ist?

Bezier Kurven

a) Erläutern Sie die Fragestellung die zur Entwicklung und Konstruktion von Bezier-Kurven führt.

Gegeben sind nun die Punkte $X_0(1|1)$, X_1 (4|6), X_2 (6|0) und X_3 (11|3).

b) Tragen Sie diese Punkte in ein Koordinatensystem ein, fassen Sie diese Punkte als Bezierpunkte der Bezierkurve P(t) auf und konstruieren Sie mit dem De-Casteljau-Algorithmus die Kurvenpunkte P(t) für $t = 0$, $t = \frac{1}{3}$, $t = \frac{1}{2}$ und $t = 1$

c) Schreiben sie die Formel für Kurvenpunkte (Bernstein-Bezier-Form) für das gegebene Beispiel auf und berechnen Sie die Koordinaten des Punktes $P(\frac{1}{3})$.

d) Die gegebenen Punkte X_0 ... X_3 werden um den Ursprung um 120° im mathematisch positiven Sinne gedreht, und es wird die Bezierkurve Q(t) zu den Bildpunkten betrachtet. Untersuchen Sie, ob $Q(\frac{1}{3})$ durch eine entsprechende Drehung von $P(\frac{1}{3})$ entsteht.

e) Begründen Sie, dass für die Bernstein-Polynome $b_{n,k}$ gilt: $\sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(t) = 1$.

f) Gilt allgemein, dass die Konstruktion von Bezier-Punkten vertauschbar ist mit der Anwendung von affinen Abbildungen in der Ebene?

Literatur: Frank Förster (Hrsg.) Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht aus der Schriftenreihe der ISTRON-Gruppe Bd. 6, Franzbecker Verlag, 2000, S.44-79

Preistheorie

Eine Computerfirma möchte einen neuen „Spielcomputer“ auf den Markt in der Bundesrepublik bringen. Der Preis, den die Firma pro Gerät verlangen will, hängt von der Menge ab, die sich auf dem Markt absetzen lässt und werde hier modelliert durch die Funktion a(x) =
$\frac{1}{20}x + 33$, für $20 \le x \le 100$,
wobei x die Menge in der Einheit 1000 Stück und y der Preis in der Einheit EURO pro Stück ist.

a) Aus der Erfahrung mit älteren Geräten ähnlicher Bauart kennt man die ungefähren Nachfragemengen bei drei unterschiedlichen Preisen:
Bei 30 EURO/Stück ließen sich 90 000 Stück,
bei 40 EURO/Stück ließen sich 60 000 Stück,
bei 45 EURO/Stück ließen sich 30 000 Stück absetzen.
Bestimmen Sie den Term der quadratischen Nachfragefunktion n, die diese drei Wertepaare interpoliert.

b) Benutzen Sie für die weitere Rechnung für die Nachfragefunktion den Funktionsterm
$$n(y) = -\frac{1}{360}y^2 + \frac{1}{12}y + 45 \quad \text{mit} \quad 20 \le y \le 100$$
Bestimmen Sie den Marktpreis, die Absatzmenge und den Umsatz, die sich aus den beiden Funktionen im Modell der „freien Marktes“ ergeben.

c) Der Verkauf derartiger „Spielcomputer“ wird natürlich mit Mehrwertsteuer (16%) belegt. Berechnen Sie unter Berücksichtigung der Mehrwertsteuer das neue Marktgleichgewicht.

d) Welcher Steueranteil pro Stück und welches Gesamtsteueraufkommen ergibt sich aus demSpielcomputerverkauf?

e) Für welchen Steuerprozentsatz würde das Gesamtsteueraufkommen maximiert? Wie groß wäre dann das Gesamtsteueraufkommen, die Absatzmenge und der Marktpreis?

Qualitätskontrolle

Ein Unternehmen stellt ein Zwischenprodukt zur Weiterverarbeitung auf zwei verschiedenen Produktionsanlagen her:
Auf der neuen Anlage A beträgt der Anteil mangelhaft produzierter Artikel etwa **25%.**
Die alte Anlage produziert etwa **50%** mangelhafte Artikel.
(Bei großen Stückzahlen können bei beiden Anlagen die dabei auftretenden Schwankungen vernachlässigt werden)
Die neue Anlage hat auch eine größere Produktionskapazität und produziert gegenüber der alten Anlage etwa die **vierfache** Menge pro Tag.

Die in einer Anlage produzierten Artikel werden jeweils zu mehreren tausend Stück in Kisten verpackt und ihrer Herkunft entsprechend jeweils mit dem Prädikat **„1.Wahl"** bzw. **„2.Wahl"** versehen und – natürlich zu unterschiedlichen Preisen – verkauft.

In der Versandstelle kommt es immer mal wieder vor, dass eine Kiste versehentlich nicht gekennzeichnet wird und dass auch durch Rückfragen die Herkunft des Artikels nicht geklärt werden kann.

Verkauft das Unternehmen nun eine solche Kiste fälschlicherweise mit dem Prädikat „1.Wahl", so muss es mit einer Schadenersatzforderung von **9000 EURO** rechnen.

Wird die Kiste hingegen mit dem Prädikat „2.Wahl" verkauft, obwohl die Artikel von der moderneren Maschine produziert wurden, so entsteht der Firma –wegen der höheren Betriebskosten der Anlage A – ein Verlust von **1000 EURO**.

a) Welche Kosten entstehen dm Unternehmen langfristig pro Kiste, wenn es in einer solchen Situation die betreffende Kiste
-- grundsätzlich mit dem Prädikat „1.Wahl"
-- grundsätzlich mit dem Prädikat „2.Wahl"
verkauft. Welche dieser beiden Strategien ist also vorzuziehen?
b) Um die Kosten zu senken, wurde beim letzten Mal der Betriebsstatistiker – ein *Bayesianer* – hinzugezogen.
Er nahm eine Stichprobe von 20 Artikeln aus der Kiste und stellte fest, dass 15 Stück in Ordnung waren.
Welche a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten hat er den beiden Ereignissen
-- „die kritische Kiste stammt von Maschine B"
-- „die kritische Kiste stammt von Maschine A"
zugeordnet und wie hat er dann entschieden?
c) Begründe, dass der Statistiker bei seiner Entscheidung ins Grübeln käme, falls bei einer Überprüfung, einer solchen Kiste die a-posteriori-Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „die kritische Kiste stammt von Maschine B" genau $\frac{1}{10}$ wäre.
d) Leite aus dem Ergebnis von c) ein Entscheidungsverfahren ab, das angibt, für welche Realisierungen der Prüfgröße
X:= Anzahl der Artikel, die bei 20 Ziehungen in Ordnung sind
die Firma nach dem Rat des Statistikers die Kiste mit dem Prädikat „1.Wahl" verkaufen

sollte.
(Hinweis: Nimm an, dass die Bayes-Formel für $P(B|X=k)$ gerade den in c) betrachteten Wert geliefert hätte und löse nach k auf).

e) Welche mittleren Kosten entstehen dem Unternehmen langfristig, wenn es immer nach dem Verfahren aus d) verfährt?
f) Da der beschriebene Statistiker gekündigt hat, stellt die Firma einen neuen Statistiker ein, der ein Spezialist für Hypothesentests ist.
Dieser entwickelt einen Hypothesentest mit dem Signifikanzniveau **α=1%**, wobei er als **Irrtum 1. Art** denjenigen wählt, der die gravierendere Konsequenz nach sich zieht.
g) Welches Entscheidungsverfahren schlägt der neue Statistiker vor?
h) Nimm zu den unterschiedlichen Ergebnissen von e) und g) Stellung.