LAND BRANDENBURG

Ministerium für Bildung, Jugend und Sport

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2005

Mathematik

Leistungskurs

Aufgabenstellungen A1 und A2 für Schülerinnen und Schüler

(Wahl für Schülerinnen und Schüler)

Aufgabenstellungen A3 (siehe Extrablatt)

(wird durch die Lehrkraft ausgewählt)

Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache, nicht programmierbarer und nicht grafikfähiger Taschenrechner, an der Schule eingeführtes Tafelwerk/ Formelsammlung
Gesamtbearbeitungszeit:	4 Zeitstunden

Wahlthemen

Aufgabenstellung A1

Thema/Inhalt: Analysis II

Hinweise: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 1.1 oder 1.2 zur Bearbeitung aus.

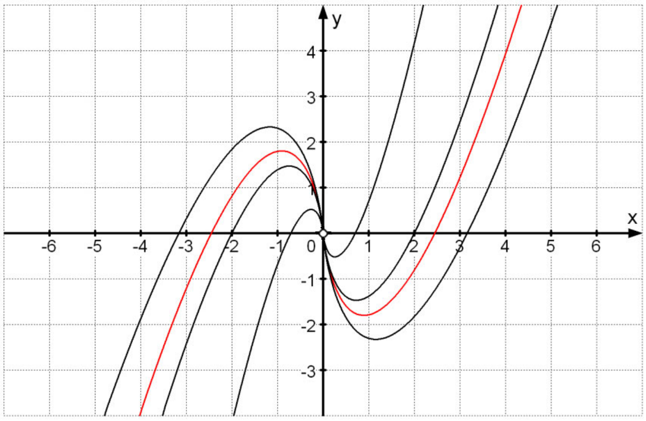
Aufgabenstellung A2

Thema/Inhalt: Analytische Geometrie II/ Lineare Algebra

Hinweise: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabe 1.1 (Analysis II)

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = x \cdot \ln\frac{x^2}{a}$; $a \in R$, $a > 0$. Die Graphen der Schar f_a, von denen einige im Bild dargestellt sind, seien G_a.



1.1.1 Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Schar f_a an, berechnen Sie die Nullstellen von f_a und untersuchen Sie G_a auf Symmetrie.

Ermitteln Sie Koordinaten und Art lokaler Extrempunkte und untersuchen Sie G_a auf Wendepunkte.

Geben Sie eine Gleichung der Ortskurve der lokalen Tiefpunkte von G_a an.

1.1.2 Zeigen Sie, dass die Funktion $F_{\frac{1}{2}}$ mit $F_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln(2x^2) - \frac{1}{2}x^2$ eine Stammfunktion von $f_{\frac{1}{2}}$ ist.

Der Graph $G_{\frac{1}{2}}$, die x-Achse und die Gerade $x = 2$ schließen im I. Quadranten eine Fläche vollständig ein. Berechnen Sie deren Flächeninhalt.

1.1.3 Jeder Graph G_a besitzt an der Stelle $x = e$ eine Tangente t_a. Ermitteln Sie eine Gleichung für t_a und entscheiden Sie, ob jede dieser Tangenten mit den Koordinatenachsen ein Dreieck begrenzt. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

1.1.4 Es sei h_a die Funktionenschar mit $h_a(x) = \sqrt{\frac{f_a(x)}{x}}$; $x \in R$, $x \geq \sqrt{a}$. Einige Graphen von h_a begrenzen mit der x-Achse und der Geraden $x = e^2$ eine Fläche vollständig. Ermitteln Sie in Abhängigkeit vom Parameter a eine Gleichung zur Berechnung des Volumens des Körpers, der durch Rotation der beschriebenen Fläche um die x-Achse entsteht.

Aufgabe 1.2 (Analysis II)

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = \dfrac{x^3 + 32a^3}{ax^2}$; $a \in R$, $a > 0$.

Ihre Graphen seien G_a.

1.2.1 Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Schar f_a, den Schnittpunkt der Graphen G_a mit der *x*-Achse und untersuchen Sie G_a auf Symmetrie.

Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten (einschließlich Polgeraden) der Funktionenschar an.

Zeigen Sie, dass es in keinem Punkt von G_a eine Tangente an G_a gibt, die parallel zur schiefen Asymptote des Graphen verläuft.

1.2.2 Ermitteln Sie Koordinaten und Art lokaler Extrempunkte von G_a und beschreiben Sie den Einfluss des Parameters *a* auf die Lage der Extrempunkte.

Begründen Sie, dass G_a keine Wendepunkte besitzt.

1.2.3 Die Graphen G_a mit $a > \frac{1}{4}$ sowie die Geraden $x = 1$ und $y = 6$ schließen jeweils im I. Quadranten eine Fläche vollständig ein.

Veranschaulichen Sie am Beispiel von G_1 eine solche Fläche in einem geeigneten Koordinatensystem.

Ermitteln Sie den Inhalt der beschriebenen Fläche in Abhängigkeit vom Parameter a.

1.2.4 Der Graph G_1, die *x*-Achse sowie die Geraden $x = 2$ und $x = 4$ schließen eine Fläche vollständig ein. Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der durch Rotation dieser Fläche um die *x*-Achse entsteht.

Aufgabe 2.1 (Analytische Geometrie II / Lineare Algebra)

Gegeben sind die Punkte $A(1\,|\,2\,|\,1)$, $B_k(2\,|\,2+k\,|\,4)$, $C_k(-1\,|\,2+2k\,|\,-1)$ und $P_k(1\,|\,k\,|\,4+k)$, $k \in R$. Für jedes $k \in R$ bestimmen die Punkte A, B_k und C_k eine Ebene E_k.

2.1.1 Die Punkte A, B_2 und C_2 sind in der Ebene E_2 die Eckpunkte eines Dreiecks.

Geben Sie für die Ebene E_2 je eine Parameter- und Koordinatengleichung an.

Zeigen Sie, dass der Winkel C_2AB_2 im Dreieck AB_2C_2 ein rechter Winkel ist.

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks AB_2C_2.

Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{n}_k = \begin{pmatrix} 2k \\ 1 \\ -k \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der Ebenenschar E_k ist und geben Sie eine Koordinatengleichung der Ebenenschar E_k an.

2.1.2 Für jedes $k \in R$ existiert ein Dreieck AB_kC_k.

Prüfen Sie, ob eines dieser Dreiecke gleichzeitig rechtwinklig und gleichschenklig bezüglich der Basis B_kC_k ist.

Untersuchen Sie, ob es unter den Dreiecken AB_kC_k gleichseitige Dreiecke gibt.

2.1.3 Die Punkte A, B_2, C_2 und P_2 seien die Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide mit der Grundfläche AB_2C_2.

Berechnen Sie die Höhe h_2 und das Volumen dieser Pyramide.

Zeigen Sie, dass die Punkte A, B_k, C_k und P_k für jedes $k \in R$ Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide mit der Grundfläche AB_kC_k sind.

Bestimmen Sie deren Höhe h_k in Abhängigkeit von *k*.

Weisen Sie nach, dass mindestens zwei verschiedene $k \in R$ existieren, für welche die dreiseitige Pyramide $AB_kC_kP_k$ die Höhe $h_k = 2\ LE$ besitzt.

Aufgabe 2.2 (Analytische Geometrie II / Lineare Algebra)

Gegeben sind der Punkt $P(0\,|\,-5\,|\,0)$, die Ebenenschar E_a mit der Gleichung
$(5a-4)x+(8-6a)y+(2-6a)z=-6a-4\ ;a\in R$ sowie die Gerade g mit der Gleichung

$\vec{x}=\begin{pmatrix}6\\5\\-4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\-10\\5\end{pmatrix};\ t\in R$ und die Gerade h mit der Gleichung $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\1\\4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix};\ s\in R$.

2.2.1 Geben Sie je eine Parameter- und Koordinatengleichung der Ebene H an, die den Punkt P und die Gerade h enthält.

Zeigen Sie, dass diese Ebene H mit der Ebene E_1 der Schar E_a übereinstimmt.

Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden g und der Ebene E_1.

2.2.2 Berechnen Sie den Abstand der beiden Geraden g und h.

Bestimmen Sie den Parameterwert $a_1\in R$, für den die beiden Ebenen E_{a_1} und E_1 zueinander orthogonal sind.

Ermitteln Sie die Größe des Schnittwinkels α der Ebenen E_0 und E_1 und geben Sie eine Gleichung ihrer Schnittgeraden g_s an.

2.2.3 Zeigen Sie, dass die Gerade k: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}18\\7\\8\end{pmatrix}$; $u\in R$ in allen Ebenen der Schar E_a liegt.

Ermitteln Sie eine Gleichung einer Ebene E_{a_2} in der Schar E_a, für die gilt:
Die Ebene E_0 wird durch Spiegelung an der Ebene E_{a_2} in die Ebene E_1 überführt.

LAND BRANDENBURG

Ministerium für Bildung, Jugend und Sport

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2005

Mathematik

Leistungskurs

Aufgabenstellung A3.1 für Schülerinnen und Schüler
(Wahl für Lehrkräfte)

Thema/Inhalt:	Stochastik II
Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache, nicht programmierbarer und nicht grafikfähiger Taschenrechner, an der Schule eingeführtes Tafelwerk/ Formelsammlung
Gesamtbearbeitungszeit:	4 Zeitstunden

Aufgabe

3.1.1 21 % der Deutschen lesen mehrmals pro Woche Bücher und werden daher als "Leseratten" bezeichnet.

3.1.1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: Unter fünf zufällig ausgewählten Personen befinden sich genau zwei Personen der Gruppe der "Leseratten".

B: Von fünf zufällig ausgewählten Personen ordnen sich mindestens zwei Personen der Gruppe jener zu, die keine "Leseratten" sind.

C: Von 2000 zufällig ausgewählten Personen gehören mindestens 417, aber höchstens 454 Personen zur Gruppe der "Leseratten".

3.1.1.2 Wie viele Personen müssten mindestens befragt werden, um mit einer Mindestwahrscheinlichkeit von 0,955 wenigstens eine "Leseratte" zu entdecken?

3.1.2 Die Bücher eines Verlegers werden auf Maschinen gedruckt, von denen bekannt ist, dass 4 % der Exemplare Farbfehler aufweisen. Druckerei und Verleger haben sich auf ein Prüfverfahren zur Feststellung von Farbfehlern geeinigt, das 98 % der Bücher mit Farbfehlern und 99 % der Bücher ohne Farbfehler korrekt erkennt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

D: Ein Buch wird dem Prüfungsverfahren unterzogen und als Buch mit Farbfehlern eingestuft.

E: Ein mit Farbfehlern eingestuftes Buch hat tatsächlich Farbfehler.

G: Ein ohne Farbfehler eingestuftes Buch weist trotzdem Farbfehler auf.

3.1.3 Das Management eines beliebten Buchautors organisiert in einer Stadt des Landes Brandenburg eine Lesung seines aktuellen Bestsellers. Dazu wird ein Saal mit einer Kapazität von 300 Plätzen angemietet. Langfristige Beobachtungen zeigen, dass 5 % der bestellten Karten nicht abgeholt werden. Deshalb lässt der Manager mehr Kartenreservierungen annehmen als Plätze vorhanden sind.

Berechnen Sie, wie viele Bestellungen höchstens akzeptiert werden dürfen, damit das Platzangebot bei dieser Buchlesung mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,95 ausreicht.

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2005

Mathematik

Leistungskurs

Aufgabenstellung A3.2 für Schülerinnen und Schüler

(Wahl für Lehrkräfte)

Thema/Inhalt:	Analysis III
Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache, nicht programmierbarer und nicht grafikfähiger Taschenrechner, an der Schule eingeführtes Tafelwerk/ Formelsammlung
Gesamtbearbeitungszeit:	4 Zeitstunden

Aufgabe

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = x \cdot e^{-ax^2+1}$; $x \in R$; $a \in R$, $a \neq 0$.
Die Graphen dieser Schar seien G_a.

3.2.1 Berechnen Sie die Nullstellen von f_a und bestimmen Sie Koordinaten und Art lokaler Extrempunkte von G_a.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Kurve , auf der alle zur Schar G_a gehörenden lokalen Hochpunkte liegen.

Untersuchen Sie f_a auf mögliche Wendestellen. (Auf den Nachweis der Existenz der möglichen Wendestellen kann verzichtet werden.)

3.2.2 Weisen Sie nach, dass die Tangenten an G_a im Punkt $P_a\left(\sqrt{\frac{3}{2a}} \mid \sqrt{\frac{3}{2e \cdot a}}\right)$ eine Schar paralleler Geraden bilden.

3.2.3 Der zum Graphen $G_{\frac{1}{6}}$ gehörende Punkt $Q\left(u \mid f_{\frac{1}{6}}(u)\right)$ mit $u > 0$,
der Koordinatenursprung O sowie der Punkt $P(u \mid 0)$ sind die Eckpunkte eines Dreiecks OPQ. Ermitteln Sie u so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks OPQ maximal wird.

3.2.4 Die Graphen G_a begrenzen für $a > 0$ mit der Ursprungsgeraden durch den Punkt $R\left(\sqrt{\frac{1}{2a}} \mid \sqrt{\frac{e}{2a}}\right)$ im I. Quadranten eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie deren Flächeninhalt in Abhängigkeit von a.

LAND BRANDENBURG

Ministerium für Bildung, Jugend und Sport

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2005

Mathematik

Leistungskurs

Aufgabenstellung A3.3 für Schülerinnen und Schüler

(Wahl für Lehrkräfte)

Thema/Inhalt:	Analytische Geometrie III / Lineare Algebra
Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache, nicht programmierbarer und nicht grafikfähiger Taschenrechner, an der Schule eingeführtes Tafelwerk/ Formelsammlung
Gesamtbearbeitungszeit:	4 Zeitstunden

Aufgabe

Gegeben sind drei Punkte $A(0\,|\,-3\,|\,-3)$, $B(4\,|\,1\,|\,-1)$ und $C(0\,|\,3\,|\,3)$, die auf der Ebene E liegen sowie die Punkteschar $S_k(-4+2k\,|\,-4\,|\,7-k)$; $k \in R$.

3.3.1 Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.

Zeigen Sie, dass sich das Dreieck ABC durch einen vierten Punkt D zu einem Quadrat $ABCD$ ergänzen lässt und bestimmen Sie die Koordinaten dieses Punktes D.

Der Punkt S_k soll nun als Spitze einer Pyramide mit der quadratischen Grundfläche $ABCD$ aufgefasst werden. Berechnen Sie ein $k \in R$, für das der Körper $ABCDS_k$ eine gerade Pyramide darstellt.

Beweisen Sie, dass alle Pyramiden $ABCDS_k$ volumengleich sind und ermitteln Sie das entsprechende Volumen V.

3.3.2 Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebenenschar E_k, in der alle Seitenflächen ABS_k der Pyramide $ABCDS_k$ gemäß Teilaufgabe 3.3.1 liegen.

Berechnen Sie die Größe des Winkels α, den die Grundfläche $ABCD$ und die Seitenfläche ABS_3 miteinander einschließen.

3.3.3 Im Innern der geraden Pyramide $ABCDS_3$ gemäß Teilaufgabe 3.3.1 soll nunmehr eine Kugel K mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r so platziert werden, dass die Kugel K alle Seitenflächen und die Grundfläche der Pyramide $ABCDS_3$ berührt.

Beschreiben Sie die Lage des Mittelpunktes M und berechnen Sie den Radius r dieser Kugel.